

*Modelización de cerámicas y transductores piezoeléctricos  
vibrando en espesor mediante matrices de transferencia*  
*Modelling ceramics and piezoelectric transducers vibrating in  
thickness mode using transfer matrices*

**Noé Jiménez**  
CSIC-UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA  
nojigon@upv.es.

**Francisco Camarena**  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA  
fracafe@upv.es.

---

**Abstract**

*En este trabajo presentamos la modelización de una cerámica piezoeléctrica vibrando en modo espesor empleando matrices de transferencia. La modelización completa del comportamiento vibratorio de un material piezoeléctrico es un problema complejo. Ello es debido principalmente al carácter tensorial de los esfuerzos junto a la anisotropía de los sólidos piezoeléctricos, tanto en sus propiedades elásticas como piezoeléctricas. Este es un problema recurrente en la docencia de Acústica y Ultrasonidos, Telecomunicaciones y sensores electrónicos. La modelización mediante matrices de transferencia proporciona un método simple pero preciso, pues captura los principales fenómenos físicos del problema electromecánico. En particular, la modelización presentada permite al estudiante por un lado obtener un modelo analítico del efecto piezoeléctrico y el estudio del sistema eléctrico-elástico, y por otro lado permite un elevado grado de libertad para modificar el diseño añadiendo capas de diferentes materiales y/o componentes electrónicos.*

*In this work we present the modeling of a piezoelectric ceramic vibrating in thickness mode using transfer matrices. The complete modeling of the vibratory behavior of a piezoelectric ceramic is a complex problem. This is mainly due to the tensorial definition of the involved stresses and the anisotropy of the piezoelectric solids, both arising due to their intrinsic elastic and piezoelectric properties. This problem is recurrent when teaching of Acoustics and Ultrasound, Telecommunications and electronic sensors. The modeling using transfer matrices provides a simple but accurate method, since it captures the main physical phenomena of the electromechanical problem. In particular, the presented modeling allows a high degree of freedom to modify the design by adding layers of different materials and / or electronic components, with, in addition, it also allows the student to obtain an analytical model of the piezoelectric effect and the study of the electrical-elastic system.*

---

Palabras clave: TMM, Método de la matriz de transferencia, piezoelectricidad, transductores ultrasónicos.  
Keywords: TMM, Transfer Matrix method, piezoelectricity, ultrasound transducers.

## 1. Introducción

Los materiales piezoeléctricos se emplean en multitud de aplicaciones tales como sensores de presión, transductores de ultrasonidos o para producir la chispa que permite encender mecheros. En estos casos, cuando el material piezoeléctrico es deformado mediante una fuerza externa se genera una diferencia de potencial eléctrico entre los extremos del material. Este efecto se denomina efecto piezoeléctrico, y fue descubierto por los hermanos Pierre y Jacques Curie en 1880 cuando estudiaban las deformaciones del cuarzo. El efecto piezoeléctrico se produce en sólidos con estructura cristalina no simétrica. Al deformarse la estructura cristalina bajo un esfuerzo externo, se produce una polarización (Kino, 1987, Arnau, 2008). Ello da lugar a que aparezca un flujo de electrones que se acumulan en un extremo del cristal hasta que se alcanza el equilibrio electrostático. De esta manera, aparece un campo eléctrico en el interior del piezoeléctrico cuando este es deformado. Cabe señalar que el efecto piezoeléctrico se da también en sentido inverso, es decir, un cristal piezoeléctrico sometido a una diferencia de potencial eléctrico se deformará hasta que se alcance el equilibrio electrostático en el interior del cristal. Así, los materiales piezoeléctricos se emplean tanto como sensores/receptores (efecto piezoeléctrico directo) como actuadores/emisores (efecto piezoeléctrico inverso).

La modelización completa del comportamiento vibratorio de una piezoeléctrico es un problema complejo. Ello es debido principalmente al carácter tensorial de los esfuerzos junto a la anisotropía, tanto en las propiedades elásticas como piezoeléctricas, de los sólidos piezoeléctricos. Además, en la práctica los materiales tienen un cierto comportamiento viscoelástico y aparecen otros fenómenos como la no linealidad, histéresis o dependencias de la elasticidad y piezoelectricidad con la temperatura. Sin embargo, existen configuraciones simplificadas que permiten su descripción mediante modelos simples, como la vibración de una cerámica piezoeléctrica en modo espesor (San Emeterio et al., 1988). Este caso es de especial interés en Ingeniería puesto que el acoplo con el medio circundante es muy eficiente: las deformaciones producidas por el piezoeléctrico pueden ser transmitidas a otro medio en forma de ondas acústicas o elásticas longitudinales.

En este trabajo presentamos la modelización de una cerámica piezoeléctrica vibrando en espesor empleando matrices de transferencia. Este es un problema recurrente en la docencia de Acústica e Ultrasonidos, Telecomunicaciones y sensores electrónicos. En particular, la modelización del problema mediante matrices de transferencia permite al estudiante por un lado obtener un modelo analítico del efecto piezoeléctrico y el estudio del sistema eléctrico-elástico, así como un elevado grado de libertad para modificar el diseño añadiendo capas de diferentes materiales o componentes electrónicos.

## 2. Piezoelectricidad

### 2.1. El material piezoeléctrico

La cerámica está compuesta de un material piezoeléctrico, en el que la relación entre el tensor de esfuerzos en el sólido,  $\mathbf{T}$  (N/m<sup>2</sup>), el tensor de deformaciones,  $\mathbf{S}$  (adimensional), el vector campo eléctrico,  $\mathbf{E}$  (V/m) y vector desplazamiento eléctrico,  $\mathbf{D}$  (C/m<sup>2</sup>), vienen dados por las ecuaciones constitutivas piezoeléctricas

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}^E \mathbf{S} - \mathbf{e}^t \mathbf{E}, \quad (1)$$

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{E} + \mathbf{e} \mathbf{S}, \quad (2)$$

y

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}^E \mathbf{T} + \mathbf{d} \mathbf{E}, \quad (3)$$

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} + \mathbf{d}^t \mathbf{T}, \quad (4)$$

donde  $\mathbf{c}^E$  (N/m<sup>2</sup>) es la matriz de módulos elásticos para campo eléctrico constante,  $\mathbf{s}^E$  (N/m<sup>2</sup>) la matriz de compliancias elásticas para campo eléctrico constante,  $\boldsymbol{\varepsilon}^S$  (F/m) la matriz de permitividad del material para deformación constante,  $\boldsymbol{\varepsilon}^T$  (F/m) la matriz de permitividad del material para esfuerzo constante. En general, el superíndice indica la magnitud que permanece invariante cuando se define una constante. Por último,  $\mathbf{e}$  (C/m<sup>2</sup>) y  $\mathbf{d}$  (C/N) son las matrices de constantes piezoeléctricas, siendo  $\mathbf{e}^t$  y  $\mathbf{d}^t$  sus respectivas matrices transpuestas. En el sistema (1-2), los primeros términos de la parte derecha representa el comportamiento elástico y eléctrico del material, mientras que los segundos términos representan el acoplo entre ambas magnitudes, es decir, la piezoelectricidad. El mismo sistema puede ser escrito como

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}^D \mathbf{S} - \mathbf{h}^t \mathbf{D}, \quad (5)$$

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\beta}^S \mathbf{D} - \mathbf{h} \mathbf{S}, \quad (6)$$

y

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}^D \mathbf{T} + \mathbf{g}^t \mathbf{D}, \quad (7)$$

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{D} - \mathbf{g} \mathbf{T}, \quad (8)$$

siendo  $\boldsymbol{\beta}$  la permitividad inversa, y  $\mathbf{h}$  y  $\mathbf{g}$  (Vm/N) las matrices de constantes piezoeléctricas. Escribir el sistema de esta manera es interesante puesto que en la caracterización de las constantes piezoeléctricas los fabricantes y laboratorios miden indiferentemente unas u otras. Por último, cabe recordar que:

$$\mathbf{c}^E = \frac{1}{\mathbf{s}^E}, \quad \mathbf{c}^D = \frac{1}{\mathbf{s}^D}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^S = \frac{1}{\boldsymbol{\beta}^S}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^D = \frac{1}{\boldsymbol{\beta}^D}, \quad (9)$$

pero por el contrario:

$$\mathbf{c}^E \neq \mathbf{c}^D, \quad \mathbf{s}^E \neq \mathbf{s}^D, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^S \neq \boldsymbol{\varepsilon}^T, \quad \boldsymbol{\beta}^S \neq \boldsymbol{\beta}^T, \quad (10)$$

por lo que debemos de prestar especial cuidado en emplear una u otra constante elástica o eléctrica. La tabla 1 resume las constantes elásticas, eléctricas y piezoeléctricas empleadas en las diferentes formulaciones.

Si lo preferimos, el sistema de ecuaciones constitutivas completo se puede escribir también en notación indexada (Gallego-Juárez, 1989) como

| Símbolo   | Descripción  |
|---|--|
| $\mathbf{c}^E / \mathbf{c}^D$                             | Compliancia elástica para campo /desplazamiento eléctrico constante  |
| $\mathbf{s}^E / \mathbf{s}^D$                             | Módulo elástico para campo /desplazamiento eléctrico constante   |
| $\boldsymbol{\varepsilon}^T / \boldsymbol{\varepsilon}^S$ | Permitividad eléctrica para esfuerzo / deformación constante   |
| $\boldsymbol{\beta}^T / \boldsymbol{\beta}^S$             | Permitividad eléctrica inversa para esfuerzo / deformación constante   |
| $\mathbf{e}$  | Contantes piezoeléctricas, formulación directa $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{S}, \mathbf{E})$ , $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{S}, \mathbf{E})$ |
| $\mathbf{d}$  | Contantes piezoeléctricas, formulación inversa $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{T}, \mathbf{E})$ , $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{T}, \mathbf{E})$ |
| $\mathbf{h}$  | Contantes piezoeléctricas, formulación directa $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{S}, \mathbf{D})$ , $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{S}, \mathbf{D})$ |
| $\mathbf{g}$  | Contantes piezoeléctricas, formulación inversa $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{T}, \mathbf{D})$ , $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{T}, \mathbf{D})$ |

Tabla 1: Descripción de las constantes y los símbolos empleados

$$T_i = c_{ij}^E s_j - e_{im} E_m, \quad D_m = \varepsilon_{mn}^S E_n + e_{im} S_i, \quad (11)$$

$$S_i = s_{ij}^E T_j + d_{im} E_m, \quad D_m = \varepsilon_{mn}^T E_n + d_{im} T_i, \quad (12)$$

$$T_i = c_{ij}^D S_j - h_{im} D_m, \quad E_m = \beta_{mn}^S D_n - h_{im} S_i, \quad (13)$$

$$S_i = s_{ij}^D T_j + g_{im} D_m, \quad E_m = \beta_{mn}^T D_n - g_{im} T_i, \quad (14)$$

donde adoptamos la convención de Einstein para la suma de los índices repetidos, por lo que  $a_{ij}b_j = \sum_j a_{ij}b_j$ .

Por ejemplo, en tres dimensiones espaciales, el sistema de ecuaciones constitutivas (1-2) para un material piezoeléctrico se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & s_{14}^E & s_{15}^E & s_{16}^E & d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ s_{21}^E & s_{22}^E & s_{23}^E & s_{24}^E & s_{25}^E & s_{26}^E & d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ s_{31}^E & s_{32}^E & s_{33}^E & s_{34}^E & s_{35}^E & s_{36}^E & d_{31} & d_{32} & d_{33} \\ s_{41}^E & s_{42}^E & s_{43}^E & s_{44}^E & s_{45}^E & s_{46}^E & d_{41} & d_{42} & d_{43} \\ s_{51}^E & s_{52}^E & s_{53}^E & s_{54}^E & s_{55}^E & s_{56}^E & d_{51} & d_{52} & d_{53} \\ s_{61}^E & s_{62}^E & s_{63}^E & s_{64}^E & s_{65}^E & s_{66}^E & d_{61} & d_{62} & d_{63} \\ d_{11} & d_{12} & d_{63} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & \varepsilon_{11}^T & \varepsilon_{12}^T & \varepsilon_{13}^T \\ d_{21} & d_{22} & d_{63} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & \varepsilon_{21}^T & \varepsilon_{22}^T & \varepsilon_{23}^T \\ d_{31} & d_{32} & d_{63} & d_{34} & d_{35} & d_{36} & \varepsilon_{31}^T & \varepsilon_{32}^T & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

dónde seguimos la convención para las componentes numerales 1 =  $xx$ , 2 =  $yy$ , 3 =  $zz$ , 4 =  $xy$ , 5 =  $yz$  y 6 =  $zx$ .

## 2.2. Ondas longitudinales en un medio piezoeléctrico

Generalmente, en materiales piezoeléctricos, como el cuarzo o el circonato-titanato de plomo (PZT), muchas de las constantes piezoeléctricas son nulas debido a la simetría del cristal, es decir, el efecto piezoeléctrico solo se produce eficientemente en algunas direcciones particulares. Para el caso que nos ocupa, puesto que consideramos vibraciones que se producen solamente en espesor, ignoraremos lo que ocurre en otras direcciones reduciendo el sistema de ecuaciones a variaciones en la dirección  $x_3$ . Así, el sistema de ecuaciones dado por (5,6) se reduce a

$$T_3 = c_{33}^D S_{33} - h_{33} D_3, \quad (16)$$

$$E_3 = \beta_{33}^S D_3 - h_{33} S_3. \quad (17)$$

Estas ecuaciones describen el sistema en la dirección  $z$  suponiendo que los otros módulos piezoeléctricos y elásticos son nulos (cosa que no ocurre en una cerámica real).

Para cerrar el sistema, podemos emplear la 2ª Ley de Newton para hacer un balance de fuerzas

$$\rho_p \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial t^2} = \frac{\partial T_3}{\partial x_3}, \quad (18)$$

donde  $\rho_p$  es la densidad en el material piezoeléctrico y  $\xi_3$  es el desplazamiento del material respecto de su posición de equilibrio en la dirección  $x_3$ . En esta ecuación el primer término expresa el producto de la masa por la aceleración del sistema, y el segundo la fuerza producida por el campo de esfuerzos. La deformación es definida en función del desplazamiento,  $\xi_3$ , como

$$S_3 = \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}, \quad (19)$$

y la velocidad de partícula como

$$v_3 = \frac{\partial \xi_3}{\partial t}. \quad (20)$$

Así, la deformación se relaciona con la velocidad de partícula como:

$$\frac{\partial S_3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \xi_3}{\partial t} \right) = \frac{\partial v_3}{\partial x_3}. \quad (21)$$

Si diferenciamos con respecto del tiempo las ecuaciones constitutivas obtenemos

$$\rho_p \frac{\partial v_3}{\partial t} = \frac{\partial T_3}{\partial x_3}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial t} = c_{33}^D \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - h_{33} \frac{\partial D_3}{\partial t}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial t} = \beta_{33}^S \frac{\partial D_3}{\partial t} - h_{33} \frac{\partial v_3}{\partial x_3}. \quad (24)$$

Estas ecuaciones describen la dinámica del sistema en la dirección  $z$ , y pueden ser resueltas directamente aplicando métodos numéricos (González-Salido et al., 2013). Sin embargo, se puede obtener una solución analítica de las mismas en función de la frecuencia conociendo las condiciones de contorno. En nuestro caso, las condiciones de contorno del problema quedan fijadas al cortar el material piezoeléctrico con una geometría dada, lo que denominamos cerámica piezoeléctrica.

La cerámica piezoeléctrica tiene una cierta permitividad, y como el material piezoeléctrico está situado entre dos placas conductoras llamadas electrodos, como mostramos en la Figura 1, el sistema se comporta de manera similar a un condensador. Si sometemos a la cerámica a una diferencia de potencial entre ambos electrodos el desplazamiento eléctrico en el interior del material será constante. Ello implica que el gradiente del desplazamiento eléctrico será nulo en el interior del condensador plano-paralelo bajo tensión constante,  $\partial D_3 / \partial x_3 = 0$ . Sustituyendo (16) en (18), aplicando la definición de deformación como  $S_3 = \partial \xi_3 / \partial x_3$ , y diferenciando ambos términos respecto del tiempo obtenemos una ecuación de ondas longitudinales en la dirección  $x_3$  como

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = c_p^2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}, \quad \text{donde } c_p = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho_p}} \quad (25)$$

es la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en el material piezoeléctrico, y en particular  $c_{33}^D$  es el módulo elástico del material piezoeléctrico medido bajo un desplazamiento eléctrico constante. Es importante señalar que las constantes elásticas se toman como  $D$  constante para vibraciones elásticas en el sentido de la polarización, perpendicular a los electrodos, mientras que se toman  $E$  constante cuando la vibración es perpendicular. Como es bien conocido, la ecuación de ondas (25), admite soluciones viajeras, es decir, dentro del material piezoeléctrico se pueden propagar ondas elásticas longitudinales.

El cálculo y conversión de unas constantes piezoeléctricas en otras puede ser tedioso en un principio. Una aproximación es expresar el sistema de ecuaciones (16-17) de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} T_3 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{33}^D & -h_{33} \\ -h_{33} & \beta_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_3 \\ D_3 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Esta forma es útil porque nos permite escribir el sistema a la inversa como

$$\begin{bmatrix} S_3 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{33}^D & -h_{33} \\ -h_{33} & \beta_{33}^S \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T_{33} \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{33}^E & d_{33} \\ d_{33} & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_3 \\ E_3 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

es decir, nos permite relacionar las distintas constantes elásticas/eléctricas y piezoeléctricas del sistema. Recuerda que en el caso de una matriz cuadrada, su matriz inversa puede ser calculada como

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad (28)$$

siendo el determinante de la matriz 2x2 dado por  $\det A = ad - bc$ . Así, para vibraciones en la dirección  $z$ , podemos encontrar fácilmente las relaciones entre los diferentes módulos como

$$\begin{aligned} c_{33}^D &= c_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^S}, & s_{33}^D &= s_{33}^E - \frac{d_{33}^2}{\varepsilon_{33}^T}, & \varepsilon_{33}^T &= \varepsilon_{33}^S + \frac{e_{33}^2}{c_{33}^E}, & \beta_{33}^T &= \beta_{33}^S - \frac{h_{33}^2}{c_{33}^D}, \\ c_{33}^E &= c_{33}^D - \frac{h_{33}^2}{\beta_{33}^S}, & s_{33}^E &= s_{33}^D + \frac{g_{33}^2}{\beta_{33}^T}, & \varepsilon_{33}^S &= \varepsilon_{33}^T - \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E}, & \beta_{33}^S &= \beta_{33}^T + \frac{g_{33}^2}{s_{33}^D}, \end{aligned} \quad (29)$$

mientras que para el caso general en tres dimensiones, como el descrito mediante la ecuación (15), es conveniente realizar la inversión directamente.

En la modelización analítica del problema, comenzaremos realizando un modelo para la vibración en espesor de la cerámica por separado mediante un modelo de tres puertos. Más tarde, incorporaremos los demás elementos del transductor mediante un modelo de dos puertos. Podemos describir la dinámica de la cerámica como la solución de las ecuaciones piezoeléctricas con unas determinadas condiciones de contorno. En lugar de resolver directamente las ecuaciones, es conveniente expresar el problema mediante matrices de transferencia. Ello, como veremos, nos proporcionará una gran flexibilidad para añadir elementos adicionales en el sistema como capas traseras (“backing”), así como capas de adaptación de impedancia y componentes electrónicos.

### 3. Sistema de tres puertos: modelo de la cerámica

#### 3.1. Modelización analítica

Consideramos una cerámica piezoeléctrica con geometría cilíndrica, siendo  $L$  es espesor y  $R$  el radio, como muestra la Figura 1 (a).

Puesto que la modelización se va a realizar en el dominio de la frecuencia, expresemos el sistema (22-24) en función de la frecuencia  $\omega$  como

$$i\omega\rho_p v_3 = \frac{\partial T_3}{\partial x_3}, \quad (30)$$

$$i\omega T_3 = c_{33}^D \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - i\omega h_{33} D_3, \quad (31)$$

$$i\omega E_3 = i\omega \beta_{33}^S D_3 - h_{33} \frac{\partial v_3}{\partial x_3}. \quad (32)$$

Nuestro objetivo será expresar las relaciones entre: (a) los esfuerzos en la dirección  $x_3$ , que en el modelo en una dimensión se corresponden con las fuerzas,  $F_b$ ,  $F_f$ , ejercidas sobre la caras del disco del piezoeléctrico de superficie  $A = \pi R^2$ , (b) las velocidades en ambas caras de la

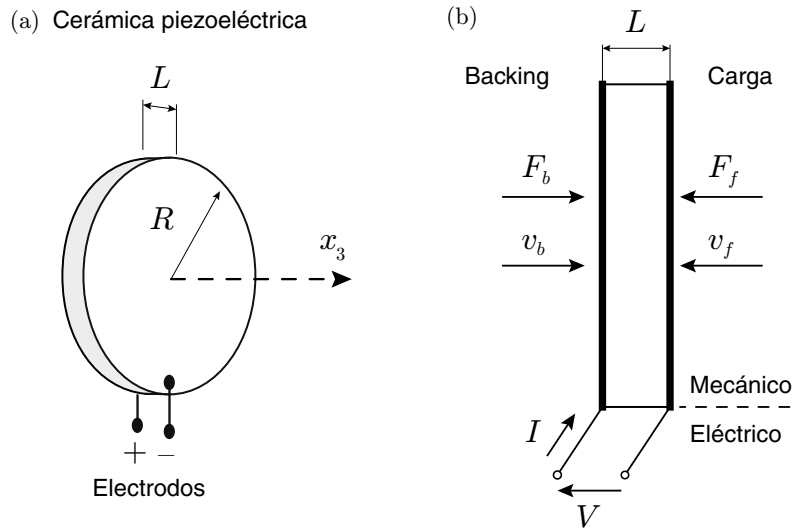


Figura 1: (a) Esquema de la cerámica piezoeléctrica de radio  $R$  y espesor  $L$ , vibrando en espesor en la dirección  $x_3$ . En ambas caras se colocan los electrodos. (b) Esquema de las magnitudes mecánicas y eléctricas involucradas en la modelización de la cerámica.

cerámica piezoeléctrica,  $v_b$  y  $v_f$  respectivamente, y (c) la diferencia de potencial a ambos lados de la cerámica, i.e., el voltaje,  $V$ , y la corriente que la atraviesa, i.e., la intensidad eléctrica,  $I = \partial D_3 / \partial t A$ , aplicadas en bornes de los electrodos tal y como mostramos en el esquema de la Figura 1 (b).

En función de la frecuencia  $\omega$ , las magnitudes involucradas se definen como

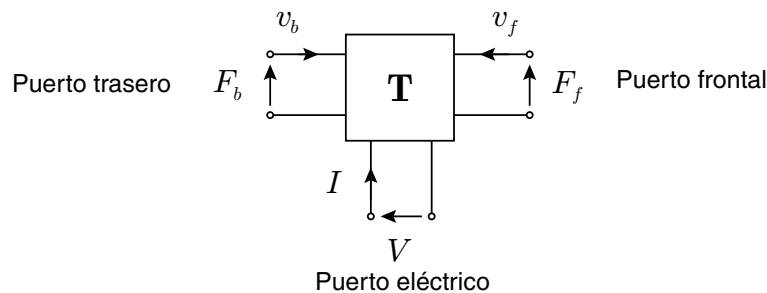
$$F_b(\omega) = A \cdot T_3(\omega)|_{x_3=0}, \quad v_b(\omega) = v_3(\omega)|_{x_3=0}, \quad (33)$$

$$F_f(\omega) = A \cdot T_3(\omega)|_{x_3=L}, \quad v_f(\omega) = -v_3(\omega)|_{x_3=L}, \quad (34)$$

$$V(\omega) = \int_0^L E_3(\omega, x_3) dx_3, \quad I(\omega) = i\omega A D_3(\omega). \quad (35)$$

Estas magnitudes son convenientes puesto que son más fácilmente estimables en el laboratorio que  $D_3$  y  $E_3$  respectivamente. Nota que puesto que  $\partial D_3 / \partial x_3 = 0$ , la intensidad es constante y no depende de la posición  $x_3$ .

De manera esquemática, estas 6 magnitudes se relacionan mediante el sistema de tres puertos siguiente



Como el sistema soporta soluciones viajeras dentro del material piezoeléctrico, para cada frecuencia podemos expresar la velocidad de partícula como la superposición de dos ondas viajando en sentidos opuestos como

$$v_3 = v_1 e^{i(\omega t - k_p x_3)} + v_2 e^{i(\omega t + k_p x_3)}, \quad (36)$$



donde  $v_1$  y  $v_2$  son las amplitudes de las ondas y

$$k_p = \frac{\omega}{c_p} \quad (37)$$

es el número de onda dentro del material piezoeléctrico cuando se propaga una onda de frecuencia  $\omega$ . Si aplicamos las condiciones de contorno dadas por (33), obtenemos

$$v_1 = v_b - v_2, \quad y \quad v_2 = \frac{v_f - v_b e^{-ik_p L}}{e^{-ik_p L} - e^{ik_p L}}. \quad (38)$$

Sustituyendo este resultado en (36), la amplitud de la velocidad dentro del material en el dominio de la frecuencia viene dada por

$$v_3 = \frac{v_b \sin(k_p[L - x_3]) - v_f \sin(k_p x_3)}{\sin(k_p L)}. \quad (39)$$

Por un lado, sustituyendo (39) en (31) y empleando la definición de corriente obtenemos la distribución de esfuerzos dentro del material piezoeléctrico como

$$T_{33} = -iZ_p \frac{v_b \cos(k_p[L - x_3]) - v_f \cos(k_p x_3)}{\sin(k_p L)} - \frac{h_{33}}{i\omega A} I, \quad (40)$$

donde hemos definido la impedancia acústica característica como

$$Z_p = \rho_p c_p. \quad (41)$$

Por otro lado, sustituyendo (39) en (32), y empleando la definiciones de voltaje y corriente podemos escribir

$$V = \frac{\beta_{33}^S L}{i\omega A} I - \frac{h_{33}}{i\omega} \int_0^L \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{v_b \sin(k_p[L - x_3]) - v_f \sin(k_p x_3)}{\sin(k_p L)} \right) dx_3. \quad (42)$$

Finalmente, si particularizamos la ecuación (40) para el esfuerzo en la cara frontal ( $x_3 = L$ ) y en la cara trasera ( $x_3 = 0$ ), obtenemos el sistema de ecuaciones algebraicas que describen la dinámica de la cerámica como

$$F_f = \frac{Z'_p}{i \tan(k_p L)} v_f + \frac{Z'_p}{i \sin(k_p L)} v_b + \frac{h_{33}}{i\omega} I, \quad (43)$$

$$F_b = \frac{Z'_p}{i \sin(k_p L)} v_f + \frac{Z'_p}{i \tan(k_p L)} v_b + \frac{h_{33}}{i\omega} I, \quad (44)$$

$$V = \frac{h_{33}}{i\omega} v_f + \frac{h_{33}}{i\omega} v_b + \frac{\beta_{33}^S L}{i\omega A} I, \quad (45)$$

dónde  $Z'_p = A \cdot Z_p$  es la impedancia mecánica del piezoeléctrico.

Este sistema de ecuaciones se puede expresar de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} F_f \\ F_b \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'_p/i \tan(k_p L) & Z'_p/i \sin(k_p L) & h_{33}/i\omega \\ Z'_p/i \sin(k_p L) & Z'_p/i \tan(k_p L) & h_{33}/i\omega \\ h_{33}/i\omega & h_{33}/i\omega & 1/i\omega C_0^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_f \\ v_b \\ I \end{bmatrix}, \quad (46)$$

dónde  $h_{33}$  es el coeficiente piezoeléctrico,  $C_0^S = \varepsilon_{33}^S A/L$  es la capacidad del condensador piezoeléctrico de sección  $A$  y espesor  $L$ , y  $\varepsilon_{33}^S = 1/\beta_{33}^S$  la permitividad del piezoeléctrico.

Existen diferentes modelos de vibración para una cerámica piezoeléctrica que emplean circuitos equivalentes de este sistema de ecuaciones (San Emeterio et al., 1988). Las diferencias básicas radican en la representación de los diferentes términos del sistema de ecuaciones (46) mediante componentes electrónicos en el modelo. Es importante señalar que todos los modelos son equivalentes y representan el sistema de ecuaciones dado por (46).



### 3.2. Modelo de Redwood

Tras desarrollar el sistema de ecuaciones (46), podemos identificar una línea de transmisión que modela las ondas elásticas en el interior de la cerámica, acoplada mediante diferentes términos al puerto eléctrico. De esta manera, podemos traducir el sistema de ecuaciones en un circuito equivalente comúnmente conocido como circuito equivalente de Redwood (Redwood, 1964). La Figura 2 muestra el circuito equivalente. Este circuito equivalente representa comple-

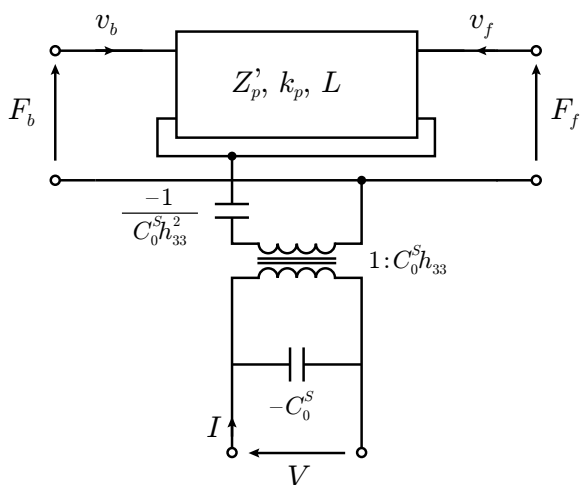


Figura 2: Circuito equivalente de Redwood para la representación gráfica del sistema de tres puertos descrito por el sistema de ecuaciones (46).

tamente el sistema de tres puertos descrito por el sistema de ecuaciones (46). Como podemos ver, existen componentes que no son físicamente realizables, como elementos reactivos de capacidad negativa. La conversión de energía eléctrica a energía mecánica es modelada mediante un transformador electromecánico de relación de transformación  $C_0^S h_{33}$ .

Emplear circuitos equivalentes ayuda a la visualización y a comprender el rol de cada uno de los términos del sistema de ecuaciones. Sin embargo, aunque los componentes del circuito de Redwood se identifican inmediatamente con los términos del sistema de ecuaciones, es conveniente manipularlo para separar las contribuciones de los elementos mecánicos de los eléctricos.

### 3.3. Modelo de Mason

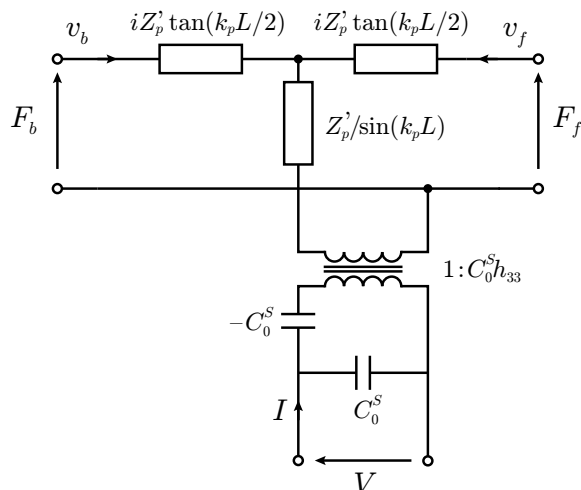
Existen otros modelos en los que los elementos aparecen de manera más explícita, como ocurre en el modelo propuesto por Mason (Mason, 1948), ampliamente empleado en la literatura. El circuito equivalente se muestra en la Figura 3, en la que apreciamos que el circuito mantiene los mismos 3 puertos. Este modelo es una modificación del modelo de Redwood, en el cual se ha sustituido la línea de transmisión en una red en “T” de impedancias concentradas, y transferido la impedancia reactiva  $(-C_0^S h_{33}^2)^{-1}$  al puerto primario del transformador.

La cerámica de longitud  $L$  es modelada con un par de impedancias concentradas de longitud  $L/2$ , pues existe una condición de simetría en el centro de la cerámica. Es en ese punto donde se conecta con el puerto eléctrico. Sin embargo, la impedancia  $Z'_p / \sin(k_p L)$  no es demasiado intuitiva. Por esa razón, el modelo puede ser manipulado para ofrecer una visión todavía más intuitiva del papel de cada elemento en el sistema de ecuaciones (46).

### 3.4. Modelo de KLM

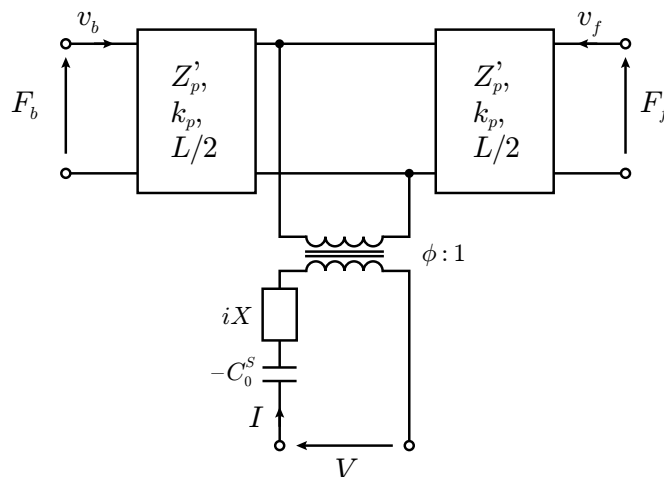
Así, Richard Krimholtz, David A. Leedom, y George L. Matthaei, propusieron una nueva modificación que se denomina comúnmente circuito equivalente KLM (Krimholtz et al., 1970).

Figura 3: Circuito equivalente de Mason para la representación gráfica del sistema de tres puertos descrito por el sistema de ecuaciones (46).



La Figura 4 muestra el circuito. Éste consta de una línea de transmisión de longitud  $L$  (en la práctica dos líneas de longitud  $L/2$ ) en la que en su punto central se acopla el puerto eléctrico mediante un transformador electromecánico de relación de transformación dependiente de la frecuencia  $\phi(\omega)$ , apareciendo en el primario una impedancia compleja y dependiente de la frecuencia  $iX(\omega)$  que depende tanto de los parámetros elásticos como de los piezoeléctricos.

Figura 4: Circuito equivalente KLM para la representación gráfica del sistema de tres puertos descrito por el sistema de ecuaciones (46).



En particular, en el modelo KLM, el transformador electromecánico posee una relación de transformación y impedancia compleja

$$\phi = \frac{2h_{33}}{\omega Z'_p} \sin(k_p L/2), \quad X = \frac{h_{33}^2}{\omega^2 Z'_p} \sin(k_p L). \quad (47)$$

Es importante señalar que todos los modelos y circuitos equivalentes vistos en esta sección son análogos, pues todos representan el mismo sistema de ecuaciones dadas por (43-45).

#### 4. Sistema de dos puertos: modelo de transductor

Aunque el sistema de tres puertos es perfectamente válido modelizar el comportamiento de la cerámica, es importante señalar que la cerámica nunca vibrará aislada del medio circundante.

En la practica tendremos una carga tanto en ambas caras de la cerámica: impedancias de radiación y del “backing” respectivamente, como en el puerto eléctrico: impedancia eléctrica del sensor/generador, cables, etc. Al conjunto de elementos mecánicos y eléctricos que permiten hacer uso del efecto piezoeléctrico para emitir o detectar ondas acústicas lo denominamos transductor. La cerámica es el elemento principal pues transforma los campos eléctricos en ondas elásticas y viceversa. Sin embargo, los transductores están compuestos normalmente de más elementos. Un ejemplo básico es el mostrado en la Figura 5.

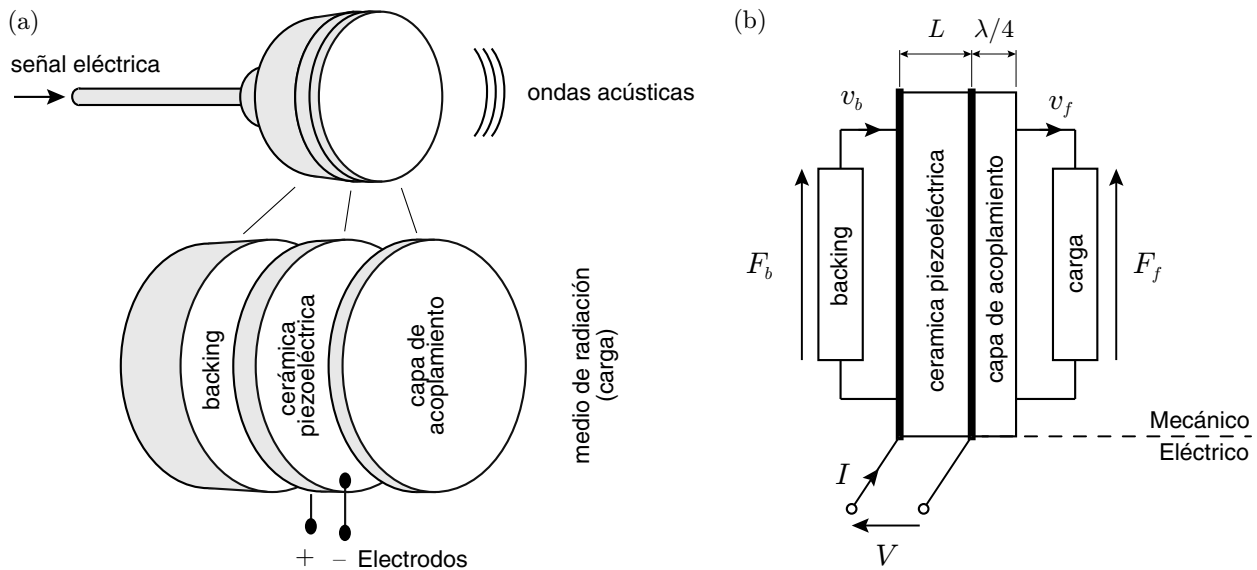


Figura 5: (a) Esquema de un transductor piezoeléctrico compuesto por una cerámica, un medio trasero o “backing” y una capa de acoplo de impedancia. (b) Esquema de la configuración multicapa para aplicar la matriz de transferencia.

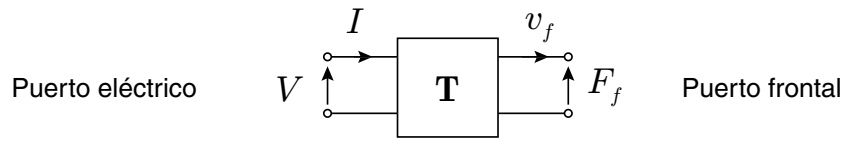
En la cara frontal de la cerámica se dispone una capa de material sólido elástico llamada capa de acoplamiento de impedancia. La función de dicha capa es mejorar la transferencia de energía de la cerámica piezoeléctrica al medio al que se desea radiar. Ello es necesario debido a la gran diferencia de impedancia acústica entre el material piezoeléctrico y el medio de radiación, en muchos casos agua o aire. Otro elemento es la capa trasera o “backing”. Mediante el ajuste de las propiedades de esta capa podemos diseñar transductores con una respuesta temporal larga y ancho de banda estrecho o por el contrario con una respuesta temporal corta y gran ancho de banda. Cuando la diferencia de impedancias entre la cerámica y el “backing” es muy alta, la energía se refleja en su practica totalidad en la interfase trasera, por tanto se maximiza la radiación hacia el medio frontal. Por el contrario, si la diferencia de impedancias es pequeña y se introducen pérdidas viscoelásticas en el material del que está formado el “backing” la resonancia se ve amortiguada, obteniéndose por tanto una respuesta con un gran ancho de banda. Normalmente al aumentar el ancho de banda de esta manera se pierde eficiencia. Por último, es común que el transductor ultrasónico requiera de una red de adaptación de impedancia eléctrica para optimizar la transferencia de energía a través del puerto eléctrico. Esta red acopla la impedancia eléctrica entre el sistema de excitación/detección y la cerámica, y puesto que el ancho de banda de los transductores piezoeléctricos no es muy elevado suele construirse mediante un filtro con unos pocos componentes electrónicos pasivos.

Para la modelización de transductores piezoeléctricos es de interés obtener la relación entre el puerto eléctrico y la cara frontal. Ello es debido a que la aplicación del transductor piezoeléctrico es radiar/detectar ondas acústicas en la cara frontal. Por tanto, es conveniente reducir el sistema de tres puertos a uno de dos, quedando la relación  $F_b/v_b = Z_b A$  fijada por la impedancia del

“backing” en la parte trasera. De esta manera es posible reducir el sistema de tres puertos a un sistema de dos puertos en el que obtener las funciones de transferencia de interés, es decir, la relación entre el puerto eléctrico y el frontal, así como la relación entre voltaje e intensidad: la impedancia eléctrica del sistema. A continuación, emplearemos matrices de transferencia para modelizar el sistema compuesto por la cerámica y el medio circundante, así como los demás elementos que componen un transductor.

#### 4.1. Matrices de transmisión

De manera general, para un sistema unidimensional podemos relacionar la fuerza,  $F_f$ , y velocidad de partícula,  $v_f$ , en la cara frontal del transductor (el puerto frontal) con el voltaje,  $V$ , e intensidad,  $I$ , en bornes de los electrodos (puerto eléctrico).



Así, el sistema estará caracterizado por una matriz de transferencia total  $\mathbf{T}$  que escribimos como

$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} F_f \\ v_f \end{bmatrix}, \quad (48)$$

donde la matriz de transferencia total  $\mathbf{T}$  viene dada por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Cabe señalar que para un sistema simétrico  $T_{11} = T_{22}$  mientras que para un sistema recíproco, el determinante de la matriz de transferencia es la unidad, es decir,  $T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1$ . El presente sistema de dos puertos es recíproco pero no simétrico.

Para un sistema compuesto por  $N$  elementos, como las diferentes capas de material y los componentes eléctricos que componen el transductor, la matriz de transferencia total  $\mathbf{T}$  se puede calcular como el producto matricial de las matrices de transferencia de los diferentes elementos que componen el sistema

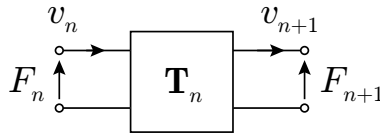
$$\mathbf{T} = \prod_n^{n=N} \mathbf{T}_n, \quad (50)$$

dónde  $\mathbf{T}_n$  es la matriz de transferencia del elemento  $n$ . Como veremos a continuación, en función de la naturaleza de cada elemento, cada matriz  $\mathbf{T}_n$  toma una forma diferente.

#### Matrices de propagación

Cuando disponemos de una capa de material elástico, podemos relacionar la presión en ambos extremos de la capa ( $F_n, F_{n+1}$ ) con la velocidad de partícula ( $v_n, v_{n+1}$ ) empleando una matriz de transferencia, que escribimos como

$$\begin{bmatrix} F_n \\ v_n \end{bmatrix} = \mathbf{T}_n \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (51)$$



Para una capa de material elástico de longitud  $L$ , en la que se propagan ondas planas, podemos expresar la matriz de transferencia  $\mathbf{T}_n$  como

$$\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} \cos(kL) & iZ' \sin(kL) \\ i \sin(kL)/Z' & \cos(kL) \end{bmatrix}, \quad (52)$$

donde  $Z' = A\rho c$  es la impedancia mecánica característica de la capa de material,  $A$  la superficie y  $k = \omega/c$  el número de onda dentro del material,  $\rho$  su densidad y  $c$  su velocidad de propagación. Cuando el material tiene pérdidas intrínsecas, tanto  $Z'$  como  $k$  son complejos y en general dependientes de la frecuencia. En este trabajo suponemos todos los materiales sin pérdidas, por lo que sus valores de número de onda y impedancia característica son reales.

Es importante señalar que la matriz  $\mathbf{T}_n$  es análoga a la de una línea de transmisión eléctrica. Para una línea de transmisión, como ocurre en los cables del conexionado, podemos relacionar la tensión e intensidad en ambos extremos de la línea eléctrica mediante

$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = \mathbf{T}_n \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix}, \quad (53)$$

siendo en este caso  $Z$  la impedancia eléctrica de la línea y  $k$  el número de onda en la línea de transmisión. La modelización del cable será importante a altas frecuencias y para cables largos, cuando se cumple que  $kL \gtrsim 1$ , es decir, cuando es posible que existan modos de resonancia en la línea de transmisión. Para frecuencias inferiores o cables cortos, el efecto de la longitud finita del cable es despreciable.

### Elementos en serie

Cuando a lo largo del sistema disponemos elementos puntuales, es decir, localizados en espacio, con una impedancia  $Z_s$ , la matriz de transmisión  $\mathbf{T}_s$  se escribe como

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} 1 & Z_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (54)$$

Estos elementos incluyen elementos mecánicos como placas y membranas, resonadores puntuales como burbujas o inclusiones, y componentes electrónicos como resistencias, condensadores o bobinas.

### Elementos en paralelo

De la misma manera, cuando en el sistema disponemos elementos localmente reactivos en paralelo, con una impedancia  $Z_p$ , la matriz de transmisión  $\mathbf{T}_p$  se escribe como

$$\mathbf{T}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_p & 1 \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Estos elementos incluyen elementos mecánicos como barras resonantes y tubos acoplados en los laterales de una guía de ondas, así como componentes electrónicos como resistencias, condensadores o bobinas.

## Transformadores

La modelización mediante una matriz de transmisión de la conversión de energía eléctrica a mecánica, es decir, el efecto piezoeléctrico, se puede realizar mediante una matriz

$$\mathbf{T}_\phi = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & 1/\phi \end{bmatrix}, \quad (56)$$

dónde  $\phi$  es el ratio de conversión de energía eléctrica a mecánica y será función de los coeficientes piezoeléctricos.

## 4.2. Modelo del transductor mediante matrices de transferencia

Podemos emplear el esquema mostrado en la Figura 6 para desarrollar un modelo generalizado (San Emeterio y Ramos,2009). En dicho modelo, suponemos que el “backing” presenta una impedancia  $Z_b = F_b/Av_b$ . De esta manera, podemos obtener una expresión explícita para la impedancia de la línea de transmisión correspondiente a la cara trasera de la cerámica en el modelo KLM (la media línea de transmisión de la parte izquierda en la Figura 4). Esta impedancia, como se muestra en la Figura 6, se incluye en el sistema como un elemento reactivo localizado acoplado en paralelo, como veremos a continuación.

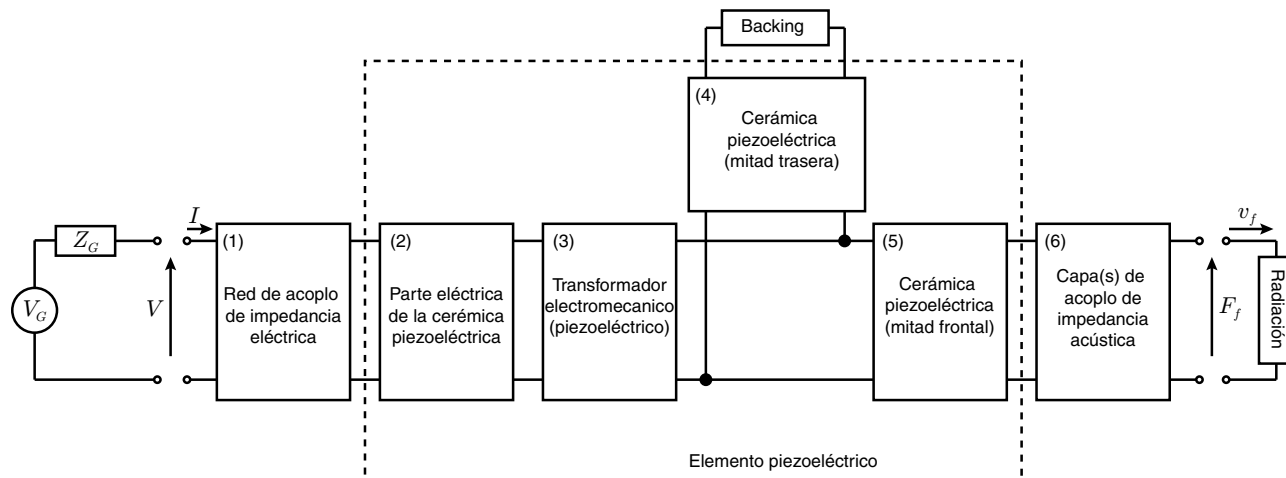


Figura 6: (a) Diagrama de bloques del transductor ultrasónico piezoeléctrico vibrando en espesor. Cada bloque modelizado por una matriz de transferencia.

El sistema completo se caracteriza por una matriz de transmisión total

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_N \mathbf{T}_E \mathbf{T}_\phi \mathbf{T}_\perp \mathbf{T}_f \mathbf{T}_{\lambda/4}, \quad (57)$$

dónde cada matriz representa un bloque en la Figura 6. Así,  $\mathbf{T}_N$  es la red de acoplo de impedancia eléctrica,  $\mathbf{T}_E$  representa los componentes puramente eléctricos de la cerámica piezoeléctrica,  $\mathbf{T}_\phi$  es el transformador electromecánico,  $\mathbf{T}_\perp$  es la impedancia de la mitad de la cerámica trasera con el “backing”,  $\mathbf{T}_f$  es la mitad de la cerámica delantera y  $\mathbf{T}_{\lambda/4}$  es la capa de acoplo de impedancia.

### Red de acoplo

La red de acoplo,  $\mathbf{T}_N$ , normalmente está compuesta por elementos pasivos con diferente impedancia eléctrica como resistencias ( $Z = R$ , siendo  $R$  la resistencia), bobinas ( $Z = i\omega X$ ,

siendo  $X$  la inductancia de la bobina) o condensadores ( $Z = 1/i\omega C$ , siendo  $C$  la capacidad del condensador). Cada elemento se incluye en función de su conexión a la red, empleando (54) para los elementos conectados en serie y (55) para los elementos conectados en paralelo.

### Componentes eléctricos de la cerámica piezoeléctrica

Los componentes puramente eléctricos de la cerámica piezoeléctrica,  $\mathbf{T}_E$ , se incluyen en el modelo mediante la suma en serie de dos impedancias como se observa en el circuito equivalente KLM (4). La impedancia resultante,  $Z_E$ , se conectan en serie a la línea, por lo que emplearemos la Ec. (54). La matriz se escribe como

$$\mathbf{T}_E = \begin{bmatrix} 1 & Z_E \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \left( \frac{1}{i\omega C_0^S} - \frac{h_{33}^2 \sin(k_p L)}{i\omega^2 Z_p'} \right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (58)$$

El primer elemento de  $Z_E$  representa la capacidad del condensador formado por el material dieléctrico entre los dos electrodos, de capacidad  $C_0^S$  definida anteriormente, mientras que el segundo término es el reflejo en la parte eléctrica de las características elásticas de la cerámica.

### Transformador electromecánico

El transformador electromecánico,  $\mathbf{T}_\phi$ , es modelizado mediante la Ec. (56), por lo que la matriz se escribe

$$\mathbf{T}_\phi = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & 1/\phi \end{bmatrix}, \quad (59)$$

con la relación de transformación  $\phi = 2h_{33} \sin(k_p L/2)/\omega Z_p'$ , como vimos anteriormente en el modelo KLM.

### Mitad de la cerámica trasera

La mitad trasera de la cerámica se modelizará mediante una matriz  $\mathbf{T}_\perp$ , en la que incluiremos el efecto de la impedancia mecánica de la mitad de la cerámica trasera junto con el “backing”, que llamamos  $Z_\perp$ . En primer lugar suponemos que el “backing” es perfectamente absorbente y no existen modos de resonancia en él, es decir, tratamos el “backing” como una impedancia acústica conocida dada por  $Z_b = \rho_b c_b$ . Puesto que la mitad trasera es una capa de material, emplearemos la Ec. (52) para relacionar la fuerza y velocidad en la mitad de la capa,  $F_0$  y  $v_0$ , con la fuerza y velocidad en la parte trasera,  $F_b, v_b$ , como

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_p L/2) & iZ_p' \sin(k_p L/2) \\ i \sin(k_p L/2)/Z_p' & \cos(k_p L/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_b \\ v_b \end{bmatrix}. \quad (60)$$

Fijando la relación en el backing como  $v_b = F_b/AZ_b$  y definiendo la impedancia mecánica específica en el centro de la cerámica como  $Z_\perp = F_0/Av_0$ , podemos desarrollar el producto matricial anterior para obtener

$$Z_\perp = \frac{F_0}{v_0} = \frac{\cos(k_p L/2) + iZ_p' \sin(k_p L/2)/Z_b'}{i \sin(k_p L/2)/Z_p' + \cos(k_p L/2)/Z_b'}. \quad (61)$$

La impedancia mecánica resultante se conecta en paralelo al sistema, como se muestra en la Figura 6, por lo que emplearemos la Ec. (55). Finalmente, tras una pequeña manipulación



algebraica, la matriz se escribe como

$$\mathbf{T}_\perp = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_\perp} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z'_p} \left( \frac{Z_p + iZ_b \tan(k_p L/2)}{Z_b + iZ_p \tan(k_p L/2)} \right) & 1 \end{bmatrix}. \quad (62)$$

#### Mitad de la cerámica frontal

La mitad de la cerámica frontal,  $\mathbf{T}_f$ , se modela simplemente como una capa elástica, es decir, empleando la Ec. (52), por lo que obtenemos

$$\mathbf{T}_f = \begin{bmatrix} \cos(k_p L/2) & iZ'_p \sin(k_p L/2) \\ i \sin(k_p L/2)/Z'_p & \cos(k_p L/2) \end{bmatrix}. \quad (63)$$

Nota que se trata de una matriz de propagación de longitud  $L/2$  con las propiedades elásticas del material piezoeléctrico.

#### Capa de adaptación de impedancia

Finalmente, es conveniente en el diseño de transductores incluir una capa de adaptación de impedancia. Comúnmente se emplea una capa de material elástico de longitud  $L_a = \lambda/4$  donde  $\lambda$  es la longitud de onda dentro de dicha capa correspondiente a la onda que se pretende maximizar su transmisión. Por otro lado, para maximizar la transmisión y evitar la reflexión entre el piezoeléctrico y el medio de carga, el material de la capa de adaptación ha de escogerse con una impedancia que sea la media geométrica de las impedancias de los medios adyacentes, es decir,  $Z_a = \sqrt{Z_p Z_f}$ .

La capa de acoplo de impedancia,  $\mathbf{T}_a$ , se modela de manera análoga empleando la Ec. (52), por lo que la matriz se escribe como

$$\mathbf{T}_a = \begin{bmatrix} \cos(k_a L_a) & iZ'_a \sin(k_a L_a) \\ i \sin(k_a L_a)/Z'_a & \cos(k_a L_a) \end{bmatrix}, \quad (64)$$

dónde  $k_a$ ,  $Z'_a$  y  $L_a$  son respectivamente el número de onda la impedancia acústica característica y el grosor de la capa de adaptación de impedancia respectivamente.

Es importante señalar que la presente metodología permite agregar un número arbitrario de capas al sistema, simplemente agregando de manera análoga las correspondientes matrices de propagación en cascada. Por tanto, el método es especialmente adecuado para el diseño y optimización de transductores de gran ancho de banda.

### 4.3. Funciones de transferencia

Una vez calculada la matriz de transferencia total mediante la Ec. (57), podemos calcular las relaciones entre las magnitudes en los dos puertos.

#### Impedancia eléctrica

La impedancia eléctrica es el ratio entre tensión e intensidad  $Z(\omega) = V(\omega)/I(\omega)$ . Para calcularlo, debemos conocer la relación entre  $F_f(\omega)/v_f(\omega)$ , que viene fijada por la impedancia de radiación. En este trabajo suponemos que la impedancia mecánica de radiación es  $Z'_f = AZ_f$  con  $Z_f = \rho_f c_f$ , lo que es cierto a altas frecuencias cuando se cumple que  $k_f R \gg 1$ . En este régimen, la impedancia de radiación es aproximadamente igual que la impedancia característica

del medio (Schmerr y Song, 2007). Así, llegamos a la siguiente expresión para la impedancia eléctrica

$$Z_{in}(\omega) = \frac{T_{11}Z'_f + T_{12}}{T_{21}Z'_f + T_{22}}. \quad (65)$$

Nota que la impedancia eléctrica se mide en ohmios [Ohm].

Es importante señalar que en el caso de sólo modelizar la cerámica sin más componentes, la impedancia eléctrica se puede obtener fijando la impedancia del “backing” y la frontal tras manipular algebraicamente el sistema dado por (46):

$$Z_{in} = \frac{1}{i\omega C_0^S} \left( 1 + \frac{k_t^2}{k_p L} \frac{i(Z_f + Z_b) Z_p \sin(k_p L) - 2Z_p^2 [1 - \cos(k_p L)]}{(Z_p^2 + Z_f Z_b) \sin(k_p L) - i(Z_f + Z_b) Z_p \cos(k_p L)} \right), \quad (66)$$

donde el coeficiente de acoplo electromecánico viene dado por  $k_t = h_{33}/\sqrt{\beta_3^S c_{33}^D}$ . En esta expresión se observa claramente como la impedancia eléctrica de la cerámica es la suma de la impedancia eléctrica del condensador más los efectos mecánicos. Estos últimos solo serán importantes para frecuencias cercanas a las frecuencias de resonancia, que en el caso de tener un backing y una impedancia frontal muy diferentes a la impedancia de la cerámica, aparecen cuando se cumple

$$k_p L \approx (2n - 1)\pi \quad \text{con} \quad n = 1, 2, \dots \quad (67)$$

es decir, a las frecuencias dadas por

$$f_n \approx (2n - 1)c_p/2L, \quad (68)$$

o lo que es lo mismo, cuando se cumple que el espesor de la cerámica es un múltiplo impar de media longitud de onda,  $L \approx (2n - 1)\lambda_n/2$ . Finalmente, recuerda que esto no es necesariamente válido cuando se introducen otros componentes en el transductor como capas de acoplamiento de impedancia.

### Funciones de transferencia

De manera análoga, podemos obtener la función de transferencia en emisión. En este caso, normalmente el generador de señal eléctrica presenta una cierta impedancia de salida  $Z_G$ , como mostramos en la Figura 6. Así, obtenemos

$$\frac{F_f}{V_G} = \frac{Z'_f}{(T_{11}Z'_f + T_{12}) + Z_G (T_{21}Z'_f + T_{22})}. \quad (69)$$

Nota que las unidades de esta función de transferencia son [N/V]. El sistema ultrasónico es recíproco, por lo que puede ser empleado empleando el efecto piezoeléctrico inverso, es decir, detectar ondas acústicas y convertirlas a una señal eléctrica. Así, en modo recepción la función de transferencia queda definida como

$$\frac{V_R}{F_f} = \frac{2Z_R}{(T_{11}Z'_f + T_{12}) + Z_R (T_{21}Z'_f + T_{22})}, \quad (70)$$

dónde  $V_R$  es el voltaje en recepción sobre una impedancia  $Z_R$  situada en el puerto eléctrico del sistema.

## Respuestas temporales

Una vez conocida la funciones de transferencia del transductor piezoeléctrico en función de la frecuencia es posible obtener la respuesta al impulso del sistema  $h(t)$ . Ello se consigue simplemente realizando la transformada de Fourier inversa de la función de transferencia como

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{F_f(f)}{V_G(f)} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_f(f)}{V_G(f)} e^{i2\pi t} df. \quad (71)$$

Esta operación comúnmente se lleva a cabo numéricamente empleando la transformada de Fourier rápida (FFT). Además, podemos convolucionar la respuesta del sistema con una señal de excitación conocida  $V(t)$ ,

$$f(t) = V(t) * h(t) = \int_0^t V(t)h(t - t')dt'. \quad (72)$$

De esta manera podemos evaluar cual será la presión transitoria en la superficie del transductor para una señal de excitación determinada.

## 5. Ejemplos

A continuación se muestra un ejemplo de la vibración de una cerámica piezoeléctrica de titanato de zirconato de plomo, en particular PZT26, radiando en agua. La cerámica se ha cortado en forma de disco con un espesor de  $L = 1$  mm, y un radio de  $R = 25$  mm. La permitividad relativa proporcionada por el fabricante es  $\varepsilon_{3,r}^T = 1300$ , mientras que la compliancia a campo eléctrico constante es  $s_{33}^E = 20 \cdot 10^{-12}$  Pa<sup>-1</sup>, el módulo piezoeléctrico en la dirección 33 es  $d_{33} = 330 \cdot 10^{-12}$  y la densidad  $\rho_p = 7700$  kg/m<sup>3</sup>. Empleando la modelización descrita en este trabajo se pueden obtener diferentes magnitudes que caracterizan la dinámica de la cerámica. Suponemos que en los casos siguientes queremos construir un transductor para radiar en agua, por lo que  $\rho_f = 1000$  kg/m<sup>3</sup> y  $c_f = 1500$  m/s.

### 5.1. Transductores de alta eficiencia

Para lograr una alta eficiencia en transmisión empleando la cerámica propuesta, el material que seleccionaremos para la parte trasera, el “backing”, ha de tener una impedancia muy diferente a la cerámica. De esta manera las vibraciones se transmitirán principalmente hacia el medio delantero, que en este caso es agua. Así, seleccionamos una capa de aire,  $\rho_b = 1.21$  kg/m<sup>3</sup> y  $c_b = 343$  m/s para que actúe como “backing”.

Las Figuras 7 (a,b) muestran la parte real e imaginaria de la impedancia, mientras que las Figuras 7 (c,d) muestran la parte real e imaginaria de la admitancia ( $Y = 1/Z$ ). Puesto que la cerámica está constituida por un material dieléctrico con una cierta permitividad ( $\varepsilon_3$ ), el dispositivo se comporta, de manera aproximada, como un condensador de capacidad  $C_0^S = \varepsilon_3^S A/L$  siendo  $A = \pi R^2$  la superficie del disco cerámico. La impedancia eléctrica de un condensador ideal viene dada por  $Z_c = 1/j\omega C_0^S$ , por lo que es imaginaria pura. Como vemos en la Figura 7 (b,d), la parte imaginaria de la impedancia del condensador es muy similar a la de la cerámica piezoeléctrica, excepto cerca de unas frecuencias particulares. Lo mismo ocurre con la parte real de la impedancia eléctrica: la resistencia eléctrica en el caso de un condensador ideal es nula, sin embargo, en el caso de nuestra cerámica piezoeléctrica toma un cierto valor resistivo sólo alrededor de ciertas frecuencias particulares (ver Figura 7 (a) alrededor de 1.8 MHz, 5.2 MHz, etc...). A estas frecuencias, el dispositivo electro-mecánico actúa como una resistencia disipando

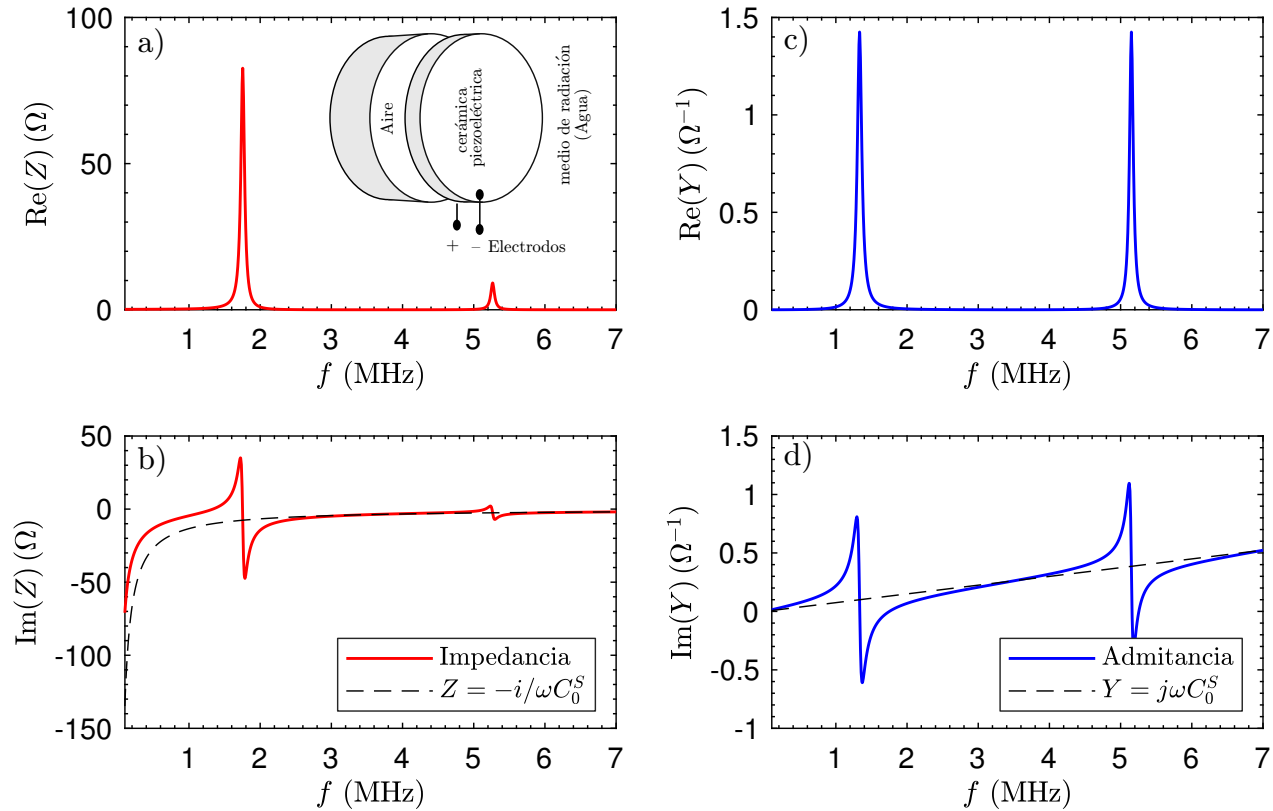
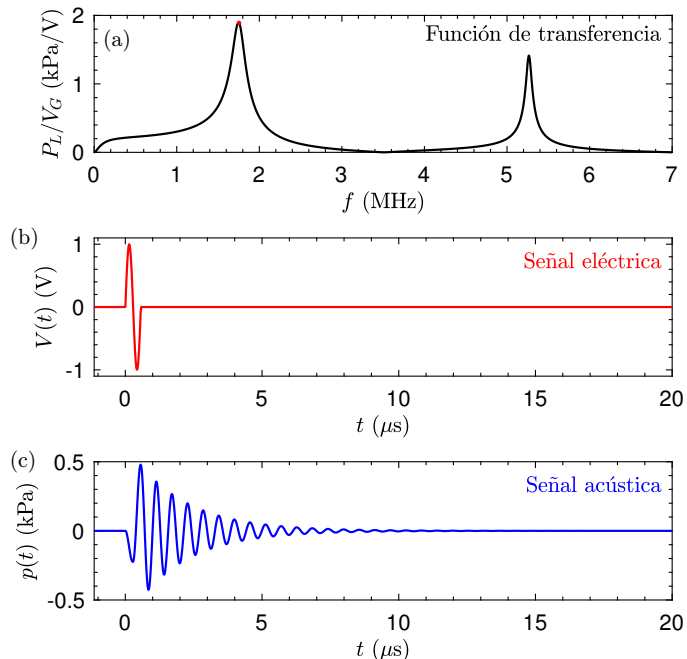


Figura 7: (a,b) Impedancia ( $Z$ ) y (b,c) admitancia ( $Y = 1/Z$ ) para el transductor de alta eficiencia radiando en agua y empleando la cerámica PZ26. (a) Parte real de la impedancia (resistencia) y (b) parte imaginaria de la impedancia (reactancia). (c) Parte real de la admitancia (conductancia) y (d) parte imaginaria de la admitancia (susceptancia).

potencia eléctrica. Sin embargo, en la modelización no hemos introducido pérdidas eléctricas en los componentes. ¿De dónde proviene la disipación de energía en el sistema?

Dicha disipación de energía eléctrica se corresponde con la energía acústica que la cerámica está radiando al medio. Ello se aprecia claramente al observar la función de transferencia en emisión en la Figura 8 (a), calculada empleando la ecuación (69). Se observa como a las frecuencias de resonancia el dispositivo es capaz de convertir eficientemente el voltaje aplicado en fuerza en la superficie de las caras por medio del efecto piezoeléctrico. Si se le aplica al dispositivo un pulso sinusoidal de voltaje como el mostrado en la Figura 8 (b), empleando las ecuaciones (71-72) vemos cómo el sistema oscila y genera un pulso acústico como el mostrado en la Figura 8 (c). Como podemos observar, la respuesta temporal es mucho más larga que la excitación pues el sistema trabaja en resonancia. En este caso, el factor de calidad es alto, lo que otorga altos valores de eficiencia ( $P/V$ ) al excitar el sistema a las frecuencias de resonancia. Es por ello que este tipo de transductores se emplea en aplicaciones de potencia (Camarena et al., 2013, Jiménez et al., 2017).

Figura 8: (a) Función de transferencia en emisión para el transductor de alta eficiencia radiando en agua. (b) Señal eléctrica de test a la entrada del sistema, compuesta por una forma de onda de un ciclo sinusoidal. (c) Respuesta acústica del sistema.



## 5.2. Transductores de banda ancha

Sin embargo, aunque el diseño anterior es muy eficiente, el sistema responde con un tiempo muy largo, pues el factor de calidad de la resonancia es muy alto. Para muchas ampliaciones, como ocurre para aplicaciones de imagen ultrasónica, es necesario que la respuesta del sistema sea muy corta. Para ello, podemos cambiar el material del medio trasero por otro que permita la radiación hacia atrás y amortigüe la respuesta de la cerámica. Por ejemplo, un “backing” de resina epoxi con impurezas (por ejemplo polvo de tungsteno), con  $\rho_b = 8500$  y  $c_b = 1020$  proporciona una impedancia más parecida a la de la cerámica ( $Z_b \approx 0.3Z_p$ ) mientras que introduce mucha atenuación.

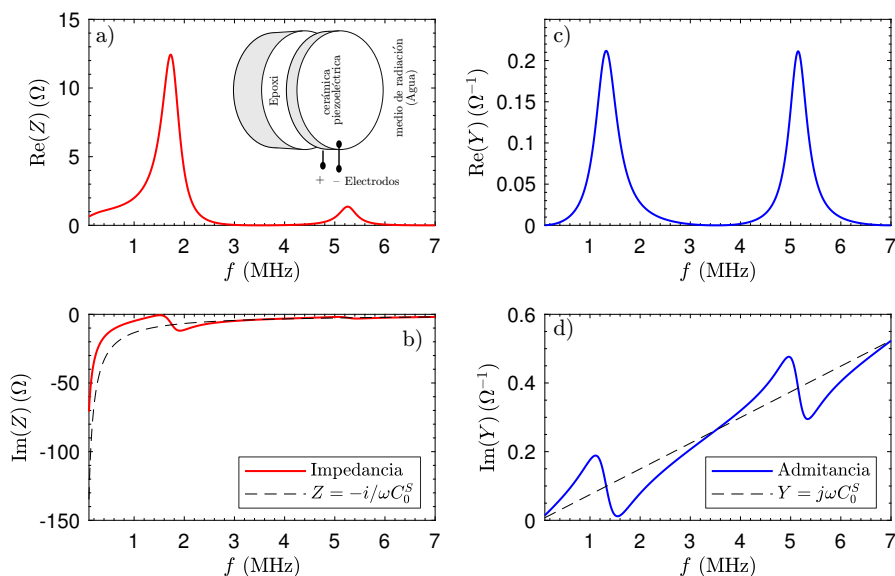


Figura 9: (a,b) Impedancia y (b,c) admitancia ( $Y = 1/Z$ ) para el transductor de alto ancho de banda radiando en agua y empleando la cerámica PZ26. (a) Parte real de la impedancia (resistencia) y (b) parte imaginaria de la impedancia (reactancia). (c) Parte real de la admitancia (conductancia) y (d) parte imaginaria de la admitancia (susceptancia).

La impedancia y admitancia de la cerámica se muestran en la Figura 9. Como se puede apreciar, los picos de resonancia se ensanchan y la impedancia difiere de la de un condensador en un mayor rango de frecuencias. Es decir, se transforma energía eléctrica en mecánica en un ancho de banda mayor. Aún así, aún se aprecia el carácter resonante de la cerámica.

La respuesta acústica se muestra en la Figura 10. Incluyendo el backing propuesto en el diseño vemos cómo la eficiencia del transductor disminuye, es decir, los valores de la función de transferencia en emisión  $P/V$  son menores. Sin embargo, el transductor responde con un mayor ancho de banda. Ello se traduce en una respuesta temporal más corta como se puede apreciar en la Figura 10 (c), por lo que este tipo de diseño es aplicable a transductores de imagen por ultrasonidos.

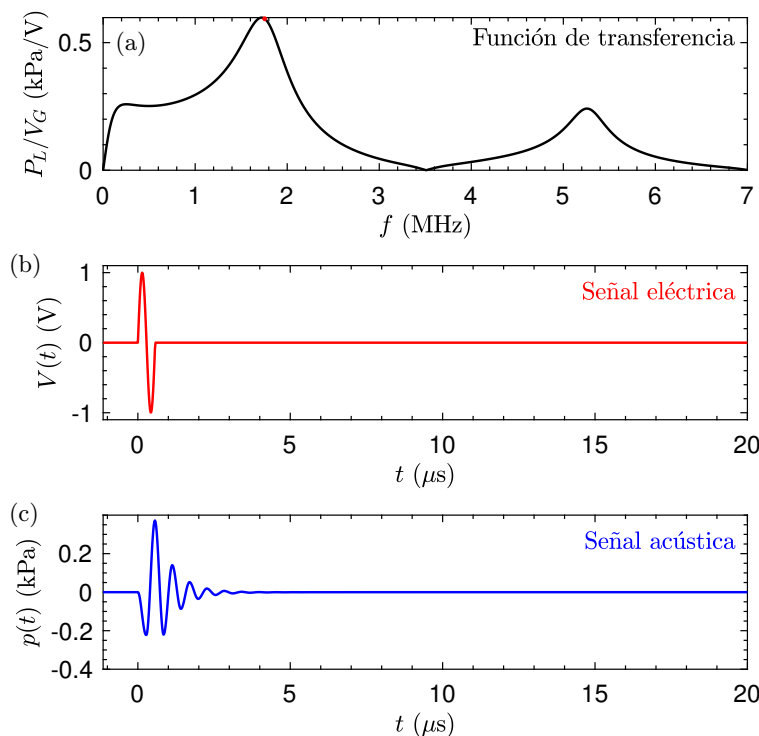


Figura 10: (a) Función de transferencia en emisión para el transductor de alto ancho de banda radiando en agua. (b) Señal eléctrica de test a la entrada del sistema, compuesta por una forma de onda de un ciclo sinusoidal. (c) Respuesta acústica del sistema.

## 6. Conclusiones

En este trabajo se ha descrito la modelización analítica de la vibración de una cerámica piezoeléctrica, así como de los diferentes componentes eléctricos y mecánicos que componen un transductor típico piezoeléctrico vibrando en modo espesor. En este ejercicio de modelización se han desarrollado conceptos de Elasticidad, Electromagnetismo, Piezoelectricidad y Acústica. Para el desarrollo del mismo se emplean conceptos de modelización matemática que van desde sistemas de ecuaciones acopladas en derivadas parciales, conceptos simples de Álgebra lineal como productos matriciales, cálculos de determinantes y cálculo tensorial. Finalmente, se aplican transformadas de Fourier empleado los resultados numéricos obtenidos, por lo que la cantidad de herramientas de modelización revisadas es considerable.







Este es un problema recurrente en la docencia de Acústica y Ultrasonidos, Telecomunicaciones y sensores electrónicos, en particular en la docencia de Grado en Ingeniería de Sistemas de Telecomunicación, Sonido e Imagen o en Máster en Ingeniería Acústica. La modelización mediante matrices de transferencia proporciona un método simple pero preciso, pues captura los principales fenómenos físicos del problema electromecánico. En particular, la modelización

presentada permite al estudiante por un lado obtener un modelo analítico del efecto piezo-eléctrico y el estudio del sistema eléctrico-elástico, y por otro lado permite un elevado grado de libertad para modificar el diseño añadiendo capas de diferentes materiales y/o componentes electrónicos.







## Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por la Generalitat Valenciana a través del contrato APOSTD/2017/042 y las subvenciones para la realización de proyectos de I+D+i desarrollados por grupos de investigación emergentes GV/2018/011. Actuación cofinanciada por la Unión Europea a través del Programa Operativo del Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER) de la Comunitat Valenciana 2014-2020 (IDIFEDER/2018/022). Este trabajo ha sido cofinanciado por la Agència Valenciana de la Innovació a través de la Unitat Científica d'Innovació Empresarial (INNCON00/18/9).

## Referencias

-  [Kino, G. S. \(1987\).](#)  
*Acoustic waves: devices, imaging, and analog signal processing.*  
Prentice-Hall Signal Processing Series. Englewood Clis, Prentice-Hall.
-  [Arnau, A. \(2008\).](#)  
*Piezoelectric transducers and applications.*  
Springer Science Business Media.
-  [San Emeterio, J. L., Sanz, P. T., Riera, E., Ramos, A. \(1988\).](#)  
*Una implementación del modelo klm para transductores piezoeléctricos en modo espesor.*  
In Anales Física B, volume 84, pages 48–55.
-  [Gallego-Juárez, J. A. \(1989\).](#)  
*Piezoelectric ceramics and ultrasonic transducers.*  
Journal of Physics E: Scientific Instruments, 22(10):804.
-  [González-Salido, N., Ferri, M., Jiménez, N. Camarena, F., Picó, R., Redondo, J., Roig, B. \(2013\).](#)  
*Simulación numérica de una cerámica piezoeléctrica.*  
Modelling in Science Education and Learning, 6:131–144.
-  [San Emeterio, J. L., Sanz, P. T., Ramos, A., Riera, E. \(1988\).](#)  
*Modelado de transductores piezoeléctricos multicapa para ecografía. Representaciones circuitales equivalentes.*  
Mundo Electron., (187):159–165.
-  [Redwood, M. \(1964\).](#)  
*Experiments with the electrical analog of a piezoelectric transducer.*  
The Journal of the Acoustical Society of America, 36(10):1872–1880.



-  [Mason, W. P. \(1948\).](#)  
*Electromechanical transducers and wave lters. Bell Telephone Laboratories series.*  
D. Van Nostrand Co.
-  [Richard Krimholtz, R., Leedom, D. A., Matthaei, G. L. \(1970\).](#)  
*New equivalent circuits for elementary piezoelectric transducers.*  
Electronics Letters, 6(13):398–399.
-  [San Emeterio, J. L., Ramos, A. \(2009\)](#)  
*Models for piezoelectric transducers used in broadband ultrasonic applications.*  
In Piezoelectric transducers and applications, pages 97–116. Springer.
-  [Schmerr, L., Song, J. S. \(2007\).](#)  
*Ultrasonic nondestructive evaluation systems.*  
Springer.
-  [Camarena, F., Adriá-Martínez, S., Jiménez, N., Sánchez-Morcillo, V. \(2013\).](#)  
*Nonlinear focal shift beyond the geometrical focus in moderately  
focused acoustic beams.*  
The Journal of the Acoustical Society of America, 134(2):1463–1472.
-  [Jiménez, N., Camarena, F., González-Salido, N. \(2017\).](#)  
*Dynamic nonlinear focal shift in amplitude modulated moderately  
focused acoustic beams.*  
Ultrasonics, 75:106–114.

Modelling in Science Education and Learning  
<http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL>