TECNIACUSTICA León · 2010
41º CONGRESO NACIONAL DE ACÚSTICA
6º CONGRESO IBÉRICO DE ACÚSTICA

CÁLCULO DE CAMPOS ACÚSTICOS NO LINEALES MEDIANTE DIFERENCIAS FINITAS EN DOMINIO TEMPORAL

PACS: 02.70.Bf 43.25.Qp 43.25.Nm

Jiménez, Noé [(*)]; Redondo, Javier.; Roig, Bernardino.; Camarena, Francisco.; Picó, Rubén. Adrian, Silvia.; Sánchez-Morcillo, Víctor.

[(*)] Instituto de Investigación para la Gestión Integrada de las Zonas Costeras (IGIC), Escuela Politécnica Superior de Gandía; Universidad Politécnica de Valencia
C/Paraninfo 1; CP: 46730 Grao de Gandía (Valencia)
Email: nojigon@epsg.upv.es

ABSTRACT

This paper describes a computational method for the explicit numerical calculation of acoustic waves in nonlinear regime. The method developed using finite difference time domain (FDTD) techniques, considering the effects of quadratic nonlinearity as well as termoviscous losses. The discretization developed is applied directly to the constitutive fluid dynamics equations (equation of motion, continuity and state), so no paraxial approximations are needed to limit the calculation of acoustic fields to a specific region of space. Thus, the method developed is capable of describing the propagation of acoustic waves under arbitrary boundary conditions, so it is valid for the estimation of a large number of nonlinear acoustic phenomena which is not possible to obtain an analytical solution. To ensure numerical stability have been implemented computational shock capturing techniques that ensure correct propagation of shock waves. On the other hand, artificial viscosity is included by a diffusive term, avoiding spatial aliasing of higher harmonics generated during propagation. For the efficient implementation of absorbent boundary conditions (ABC's) has adapted the nonlinear region of interest through a transition zone to external linear subdomains. On these linear subdomains the ABC's are developed such perfect matched layers (PML) based on time-domain formulation of the complex coordinate stretching method. Finally, the algorithm is validated by comparison with several analytical solutions, and focused ultrasound device simulation is developed to obtain the focus shift, radiation pressure and streaming.

RESUMEN

El presente trabajo describe un método computacional explícito para el cálculo numérico de ondas acústicas en régimen no lineal. El método desarrollado emplea técnicas basadas en diferencias finitas en dominio temporal (FDTD) considerando los efectos de no linealidad cuadrática además de los efectos de viscosidad transversal y volumétrica del fluido. La discretización desarrollada es aplicada directamente sobre a las ecuaciones constitutivas que describen la dinámica de un fluido (ecuación de movimiento, continuidad y estado), por lo que no es necesario realizar aproximaciones paraxiales que limiten el cálculo de los campos acústicos a una región concreta del espacio. Así, el método desarrollado es capaz de describir la propagación de ondas acústicas bajo condiciones de contorno arbitrarias, por lo que es válido para la estimación de una gran cantidad de fenómenos acústicos no lineales en los que no es posible obtener una solución analítica. Para asegurar la estabilidad numérica del método se han implementado técnicas computacionales de *shock capturing* que aseguran la correcta propagación de ondas de choque. Por otro lado, se incluye viscosidad artificial mediante un término difusivo, evitando el aliasing espacial de los armónicos superiores generados durante la propagación. Para la implementación eficiente de condiciones de contorno absorbentes (ABC's) se ha adaptado la región de interés no lineal mediante una zona de transición a subdominios externos lineales. Es sobre estos subdominios lineales donde se implementan las

ABC's tipo *perfect matched layers* (PML) basadas en la formulación en dominio temporal del método *complex coordinate stretching*. Finalmente, el algoritmo es validado mediante comparación con la solución analítica para una onda plana en régimen no linear y simulación de un dispositivo ultrasónico focalizado para obtener el desplazamiento de la focal, la presión de radiación y el streaming generado.

1 INTRODUCCIÓN

Las aproximaciones del modelo de acústica lineal para ondas de pequeña amplitud simplifican las ecuaciones constitutivas en gran medida, facilitando y en muchos casos posibilitando la derivación de soluciones analíticas simples para el modelado de fenómenos físicos concretos. Sin embargo, existen multitud de fenómenos acústicos que no pueden ser descritos mediante los modelos lineales. Las aproximaciones realizadas delimitan el estudio a ondas de pequeña amplitud, por lo que no pueden ser usados para modelar aplicaciones de potencia como en medicina terapéutica HIFU (*HIgh Focused Ultrasound*), litotricia, la administración controlada de medicación, análisis vibratorio de dispositivos de cortado, raspado y limpieza, fenómenos de *streaming*, fuerza de radiación, cavitación, resonadores no lineales, sonoluminescencia, y un largo etcétera[1]. Pero además, los modelos lineales omiten otros fenómenos producidos durante la propagación por efecto acumulativo en medios altamente no lineales que también ocurren para ondas de pequeña amplitud. Es por ello que para determinadas aplicaciones de baja señal como pueden ser la ecografía común y en especial las nuevas técnicas de imagen por vibroacustografía, la solución ofrecida por los modelos lineales no describe con fidelidad los fenómenos acústicos observados experimentalmente.

Así, a partir de los trabajos de Euler para dinámica de fluidos[1], se han desarrollado multitud de modelos para la descripción de los fenómenos acústicos no lineales. La mayoría de ellos tiene como objetivo derivar una ecuación de onda análogamente a la ecuación de Alembert para el caso lineal. Así, podemos encontrar modelos como la ecuación de Kuznetsov[2], que añade diferentes términos para el modelado de los efectos de no linealidad y disipación de la onda. A partir de dicha expresión de Kuznetsov se pueden derivar diferentes ecuaciones en función de las simplificaciones planteadas en cada problema en concreto. Así, la ecuación de Burgers proporciona el estudio de los efectos combinados de disipación y no linealidad para ondas planas[1]. Cuando los efectos de no linealidad por efecto acumulativo predominen sobre los efectos locales debidos a altas amplitudes, la ecuación de Westervelt proporciona una aproximación más exacta que la ecuación de Burgers. Aun así, esta ecuación no es apropiada para la descripción de ondas estacionarias[1]. Otra expresión ampliamente estudiada es la aproximación paraxial desarrollada por Khokhlov, Zabolotskaya y Kuznetsov y conocida como ecuación KZK, la cual describe haces acústicos focalizados, contemplando los efectos de no linealidad, disipación y difracción en aproximación parabólica[3]. El modelo KZK puede ser modificado para tener en cuenta otros fenómenos de absorción como procesos de relajación, o heterogeneidades en la velocidad de propagación[1].

Como contrapartida a la fidelidad de dichos modelos, su gran complejidad ocasiona que obtener una solución analítica bajo condiciones de contorno dadas sea una difícil tarea, y en muchas ocasiones imposible. Es en estos casos, la alternativa a la solución analítica es el empleo de métodos numéricos para obtener una solución aproximada. En los últimos años se han desarrollado numerosas técnicas numéricas basadas en diferencias finitas para resolver problemas no lineales como las empleadas por Hallaj y Cleveland[4] para resolver la ecuación de Westervelt en un fluido termoviscoso. Por otro lado, la ecuación KZK ha sido resuelta mediante métodos numéricos por Christopher[5] en el dominio frecuencial, código que se conoce comúnmente como código Bergen. En domino temporal, Lee y Hamilton[6] desarrollaron el denominado código Texas para aproximar la solución de la ecuación KZK para haces focalizados axisimétricos. En el código se emplean diferentes técnicas (diferencias finitas posteriores, Crank-Nickolson) para aproximar cada término de la ecuación independientemente (*operator splitting*). Yang y Cleveland[7] extendieron el código Texas a simulación 3D sin simetría axial sustituyendo los operadores Crank-Nickolson por el método ADI (*Alternating Direction Implicit*). Existe también una versión del código Texas para resolver la ecuación de Burgers

para ondas planas en fluidos viscosos. Sin embargo, todos los métodos anteriores son aproximaciones derivadas a partir del sistema completo de leyes conservativas. El otro grupo de métodos, a los que pertenece este trabajo, se basa en el uso del sistema completo de ecuaciones, por lo que tienen inherentemente en cuenta los efectos físicos de propagación de ondas acústicas sin necesidad de aproximarlos mediante términos independientes. Así, Botteldooren[8] propone un método numérico basado en FDTD para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes aunque, debido a las aproximaciones realizadas, está limitado a efectos no lineales moderados. Ginter[9] propone un método basado en diferencias finitas para fluidos ideales en formulación conservativa. Para ello, emplea el método DRP (*Dispersión Relation Preserving*) ya que se trabaja con un número de Courant inferior a 0.149. El método está limitado ya que no se tiene en cuenta ningún proceso de disipación física de la onda acústica; el puntero de siete elementos discretos en espacio y cuatro en tiempo dificulta la implementación de heterogeneidades y condiciones de contorno, además de necesitar un gran buffer de memoria para almacenar los tres estados anteriores para todas las variables. Nabavi[10] propone un método para la modelización de resonadores acústicos basado en una discretización en diferencias finitas compactas (Padé) en espacio y el método Runge-Kutta en tiempo, ambas de cuarto orden y para gases termo-viscosos. En el trabajo de Vanhille y Campos-Pozuelo[11], también para resonadores, se propone una solución numérica bajo la suposición de un fluido Newtoniano e irrotacional en coordenadas Lagrangianas.

En el presente trabajo se propone un método numérico para resolver el sistema completo de ecuaciones constitutivas para fluidos en régimen no lineal mediante el empleo de técnicas FDTD. El método propuesto contempla los procesos de disipación debidos a conducción térmica y a la viscosidad transversal y volumétrica del fluido. En el método se distingue entre el caso de líquidos y gases: para líquidos se emplea la ecuación de estado no lineal en una aproximación de segundo orden mientras que en el caso de gases se emplea una expresión exacta. Debido a la discretización conservativa de las variables se emplea un algoritmo iterativo para aproximar ciertas incógnitas que aparecen implícitas en la formulación, por lo que el método propuesto es de naturaleza explícita optimizando así el tiempo de cálculo de cada paso temporal. Se detallan en el trabajo las condiciones de estabilidad necesarias para la convergencia del método: la condición lineal CFL así como las dos técnicas empleadas para asegurar la estabilidad no lineal, la viscosidad artificial y un término de orden superior para la captura del shock (*shock capturing*). Por último, se ha diseñado un método original para la implementación de condiciones de contorno absorbentes tipo PML mediante la adaptación de subdominios lineales.

2 MODELO FÍSICO

Partiendo de las ecuaciones generales de la hidrodinámica podemos deducir el modelo físico que describe la dinámica de un fluido en régimen no lineal teniendo en cuenta las pérdidas por viscosidad y conducción térmica. Este modelo se basa en los principios de conservación de masa, momento y energía, además de una expresión que describa el estado termodinámico del fluido[12]. Así, el principio de conservación de masa implica que la variación temporal de masa en el interior de un volumen fijo es debida al flujo neto de ésta a través de la superficie de dicho volumen. Debido a ello, podemos escribir la ecuación de continuidad como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{1}$$

Donde ρ es la densidad total en el fluido y $\mathbf{v}$ es la velocidad de partícula de éste. Por otro lado, el principio de conservación de momento implica que el cambio del momento en el interior de un volumen dado es igual al flujo de momento este a través de la superficie de dicho volumen. Así, la llamada ecuación de movimiento para un fluido sin pérdidas es:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \nabla p = 0 \tag{2}$$

Donde p es la presión total del fluido. Ya que en régimen no lineal la velocidad de partícula no es despreciable frente a la velocidad de propagación de la onda, la derivada material de la velocidad (término $D\mathbf{v}/Dt$), se ha de expresar como $\partial\mathbf{v}/\partial t+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$. El segundo término $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ es la derivada convectiva, que representa el transporte de la onda (variación de la velocidad de propagación asociada al cambio de posición de la partícula fluida); es una fuerte fuente de no linealidad. Teniendo en cuenta además los efectos de la viscosidad del fluido podemos escribir la ecuación de movimiento (2) como:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right)+\nabla p-\eta\nabla^2\mathbf{v}-\left(\eta_B+\frac{1}{3}\eta\right)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})=0 \qquad (3)$$

Donde η es la viscosidad trasversal, que tiene en cuenta el efecto de difusión del momento entre elementos adyacentes con diferentes velocidades. La viscosidad volumétrica, η_B, está relacionada con las pérdidas debidas a la diferencia entre la presión estacionaria y la presión acústica. Estas últimas pérdidas son una aproximación a baja frecuencia, si queremos una descripción más precisa en alta frecuencia hemos de tener en cuenta procesos de relajación en el fluido[18]. Por ello, la ecuación conservación del momento en un fluido viscoso (3) se cumplirá cuando el tiempo de relajación del fluido sea mucho menor que la escala temporal de la perturbación acústica.

Para cerrar el sistema es necesario añadir una expresión que describa el estado termodinámico del fluido. Una manera de escribir esta ecuación es expresar la presión en función de la densidad y de la entropía por unidad de masa como $p(\rho, s)$. Para deducir la forma general de esta expresión podemos realizar un desarrollo en serie de Taylor de la ecuación de estado $p(\rho, s)$ sobre el estado del fluido en equilibrio (ρ_0, s_0). Así, obtenemos las variaciones de presión sobre la presión en equilibrio ($p'=p-p_0$) en función de las variaciones de densidad sobre la densidad estacionaria ($\rho'=\rho-\rho_0$) y la entropía y sus variaciones. Despreciando los términos del desarrollo de orden superior a dos, podemos escribir la ecuación de estado para fluidos en una aproximación de segundo orden como:

$$p'=\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s\right]_{\rho=\rho_0}\rho'+\frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_s\right]_{\rho=\rho_0}\rho'^2+\left[\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho\right]_{s=s_0}s' \qquad (4)$$

Podemos definir la velocidad de propagación c de la onda y la velocidad de propagación pequeña señal c_0 como:

$$c^2=\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \qquad\qquad c_0^2=\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s\right]_{\rho=\rho_0} \qquad (5a, 5b)$$

Por otro lado, haciendo uso de relaciones termodinámicas[18] podemos obtener el tercer término de la ecuación (4):

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho s'=-\kappa\left(\frac{1}{C_V}-\frac{1}{C_p}\right)\nabla\mathbf{v} \qquad (6)$$

Donde κ es el coeficiente de conductividad térmica, que modela los procesos difusivos por conducción de calor y C_V y C_P son el calor específico del fluido a presión constante y a volumen constante respectivamente. Estas pérdidas por conducción de calor son mucho mayores para gases que para líquidos, y en estos últimos pueden ser despreciadas frente a las pérdidas

modeladas por la viscosidad o los procesos de relajación del líquido. Por otro lado, es muy útil introducir el conocido coeficiente B/A; donde:

$$A=\rho_0\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s\right]_{\rho=\rho_0} \qquad B=\rho_0^2\left[\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_s\right]_{\rho=\rho_0} \tag{7a, 7b}$$

De manera que podemos reescribir la ecuación de estado para fluidos como:

$$p'=c_0^2\rho'+\frac{c_0^2}{\rho_0}\frac{B}{2A}\rho'^2-\kappa\left(\frac{1}{C_V}-\frac{1}{C_p}\right)\nabla\mathbf{v} \tag{8}$$

Esta expresión describe el estado termodinámico del fluido con una aproximación de segundo orden y los valores para el coeficiente B/A han de ser determinados experimentalmente. Es necesario remarcar que para gases podemos encontrar una relación de estado exacta, sin tener que recurrir al truncamiento del desarrollo de Taylor anterior. Así, partiendo de la relación de estado para un gas ideal descrita por Poisson[3]:

$$p'=p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}-p_0 \tag{9}$$

Donde γ es el índice adiabático del gas, igual a la relación entre el calor específico a presión constante y a volumen constante ($\gamma=C_P/C_V$). Por otro lado, el índice adiabático se relaciona con el parámetro de no linealidad B/A mediante $\gamma=1+B/A$. La velocidad del sonido en el gas viene determinada también mediante el índice adiabático como $c_0^2=\gamma\, p_0/\rho_0$. Finalmente, para tener en cuenta los efectos de conducción de calor en gases podemos añadir el término de la ecuación (6) a la ecuación de estado de Poisson, de manera que finalmente obtenemos:

$$p'=p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}-p_0-\kappa\left(\frac{1}{C_V}-\frac{1}{C_p}\right)\nabla\cdot\mathbf{v} \tag{10}$$

Esta expresión es la empleada en este trabajo para describir el estado del fluido cuando éste se trate de un gas. Para líquidos, existen otras relaciones de estado como la expresión empírica propuesta por Tati[3], sin embargo, puesto que son expresiones aproximadas se modelizará el estado termodinámico del líquido mediante la ecuación (8).

Resumiendo, las tres ecuaciones constitutivas que componen el sistema a resolver son las expresiones (1), (3) y (8) en el caso de líquidos o (10) para gases. De esta manera las tres incógnitas son la densidad (ρ), las variaciones de presión (p') y el vector velocidad de partícula ($\mathbf{v}$).

3 DISCRETIZACIÓN MEDIANTE DIFERENCIAS FINITAS CENTRADAS

3.1 Coordenadas cartesianas, 2D

Definiendo un sistema de coordenadas cartesianas y en tan solo dos dimensiones podemos obtener las relaciones para las distintas componentes a partir de las relaciones constitutivas (1, 3, 8-10). Así, la ecuación de conservación de masa (1) se puede expresar como:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)+v_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+v_y\frac{\partial\rho}{\partial y}=0 \tag{12}$$

La ecuación de conservación del momento (3) se descompone en dos expresiones para las dos componentes de velocidad:

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t}+\rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}-\eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}-\left(\zeta+\frac{1}{3}\eta\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)=0 \qquad (13)$$

$$\rho\frac{\partial v_y}{\partial t}+\rho\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)+\frac{\partial p}{\partial y}-\eta\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}-\left(\zeta+\frac{1}{3}\eta\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)=0 \qquad (14)$$

Y para cerrar el sistema, la ecuación de estado para fluidos termo-viscosos (8) en coordenadas cartesianas 2D:

$$p'=c_0^2\rho'+\frac{c_0^2}{\rho_0}\frac{B}{2A}\rho'^2-\kappa\left(\frac{1}{C_V}-\frac{1}{C_p}\right)\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) \qquad (15)$$

3.2 Discretización

La aproximación de las derivadas parciales mediante diferencias finitas centradas se deduce a partir de desarrollos en serie de Taylor[13]. Por ello, siempre que la solución del problema físico sea una solución continua, la solución de un esquema numérico consistente y estable convergerá a la solución física. Para realizar el citado desarrollo en serie de Taylor asumimos que la función es derivable en todo punto, y por ello, si la función solución real contiene discontinuidades no podemos asegurar que el método converja a la solución física del problema. El reflejo de ello en acústica es que no se asegura la correcta velocidad de propagación de las ondas de choque en la solución numérica. Para asegurar la correcta velocidad de propagación de la discontinuidad se ha de emplear un esquema numérico conservativo[13]. La formulación de las ecuaciones (12-15) no es explícitamente conservativa: estas expresiones no están enunciadas de manera que la variación temporal de las magnitudes $\mathbf{U}$ esté relacionada con la variación espacial del flujo $\mathbf{F}$ de dichas magnitudes:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U}+\nabla\mathbf{F}=\mathbf{Q} \qquad (16)$$

Formulación conservativa de un problema hiperbólico, dónde $\mathbf{U}$ son las magnitudes descritas por las leyes de conservación (ρ, ρv, E *(energía), etc.*), $\mathbf{F}$ son los flujos de dichas magnitudes y $\mathbf{Q}$ los términos inhomogéneos del sistema de ecuaciones diferenciales. Por ello, ya que nuestro sistema no está formulado en una forma estrictamente conservativa hemos de asegurar que la discretización de las ecuaciones (12-15) respete las leyes de conservación para cada celda discreta. Ello se consigue mediante la conveniente interpolación espacial y temporal de los campos de velocidad, densidad y presión[13].

Para la discretización de los campos acústicos asumimos una malla típica de los métodos FDTD, con los campos de presión y densidad al tresbolillo en espacio y tiempo con las componentes de la magnitud vectorial velocidad:

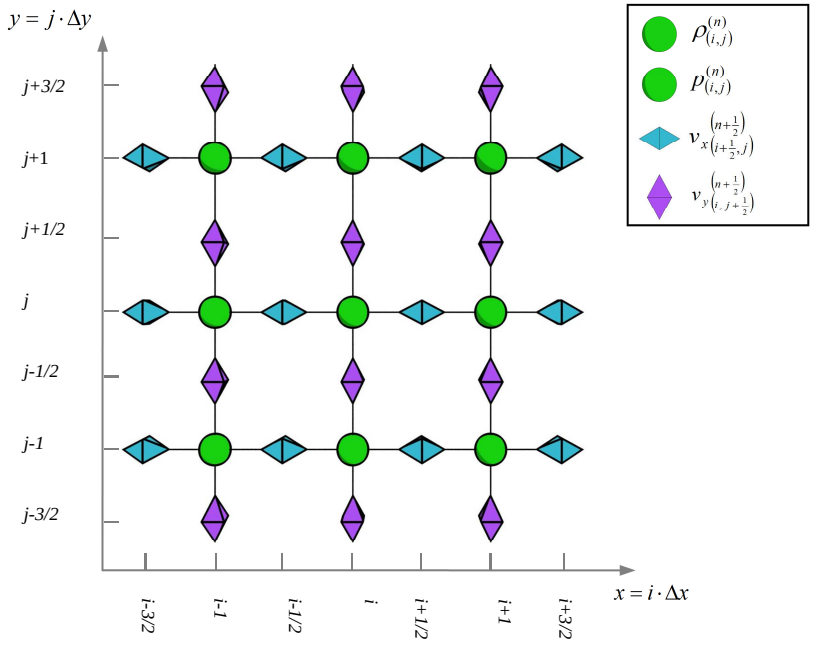


Figura 1. Discretización espacial de los campos de presión y velocidad

En el que el tiempo discreto es $n=t/\Delta t$, y el espacio discreto es $i=x/\Delta h$ y $j=y/\Delta h$. Así, la discretización mediante diferencias finitas centradas de la ecuación de continuidad (12) tendrá que aproximar los diferentes términos en el instante discreto $t=n+1/2$ y la posición en la malla $x=i$, $y=j$, siendo necesaria la interpolación espacial y temporal de las magnitudes en muchos casos. Análogamente, la componente x de la ecuación de movimiento (13) se han de discretizar aproximando todos los términos en el instante discreto $t=n$ y el la posición de la malla $x=i+1/2$, $y=j$. La componente y de la ecuación de movimiento (14) estará resuelta en $t=n$, $x=i$, $y=j+1/2$. Finalmente, la ecuación de estado (15), tanto para gases como para líquidos está resulta en el instante discreto $t=n$, y las posiciones de malla $x=i$, $y=j$. Dicha discretización se muestra en el anexo A.

El sistema de ecuaciones resultante es un esquema numérico explícito, es decir, $\rho(n+1,i,j)$ es función de $\rho(n,i,j)$. Sin embargo, debido a la interpolación espacial realizada, no es posible obtener una expresión algebraica sencilla de igual manera que en el caso lineal ya que $\rho(n+1,i,j)$ también depende de $\rho(n+1,i+1,j)$, de $\rho(n+1,i,j+1)$, etc. (ver anexo A). Lo mismo ocurre para las diferentes componentes de velocidad de partícula v_x y v_y. Para solventar este problema se ha empleado un método iterativo para la resolución de las incógnitas de instantes futuros que están implícitas en la formulación descrita. La implementación resulta sencilla debido a que los términos lineales son los que tienen un mayor peso en la solución numérica. Así, el factor crítico que es establecer el valor inicial para el método iterativo lo aporta la solución del problema acústico lineal, y tras unas pocas iteraciones la solución converge hacia la solución física del problema no lineal. Debido al uso del método iterativo el tiempo de cómputo aumenta debido a que se necesita calcular varias veces todo el dominio no lineal.

3.3 Convergencia, consistencia y estabilidad

El modelo descrito es un sistema hiperbólico desarrollado a partir de leyes conservativas (conservación de masa, momento y energía). Por tanto, para que la solución del método numérico converja a la solución física (en el caso de que ésta exista) se han de cumplir las condiciones del teorema de Lax-Wendroff[14]. Ello implica que el esquema numérico se ha de formular de forma conservativa; es decir, los principios de conservación enunciados por las leyes físicas se han de cumplir para cada celda del esquema numérico. Si cumplimos esta

condición estamos garantizando que si la solución numérica converge, lo hace a una solución débil. Aun así, el cumplimiento del citado teorema de Lax-Wendorff no satisface que el método numérico converja.

Para asegurar la convergencia del problema no lineal se requiere además la estabilidad del esquema numérico (Teorema de equivalencia de Lax[15]). La primera condición de estabilidad para el método FDTD aquí descrito, al igual que en los sistemas hiperbólicos lineales es la conocida condición de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) que relaciona la duración del paso temporal en función de la discretización espacial. Para una discretización uniforme mediante una malla estructurada de dimensión D y en coordenadas cartesianas:

$$S = c_0 \frac{\Delta t}{\Delta h \sqrt{D}} \leq 1 \tag{17}$$

Donde S es el denominado número de Courant, D es la dimensión del problema, Δt y Δh son el paso temporal y el paso espacial de la discretización.

La segunda condición de estabilidad para el sistema hiperbólico no lineal está ligada al tratamiento de las discontinuidades, lo que desde el punto de vista frecuencial se manifiesta como aliasing espacial. Debido a la no linealidad del termino advectivo de la ecuación de conservación del momento ($\mathbf{v}\cdot\nabla\,\mathbf{v}$), la velocidad de propagación depende de la velocidad de partícula, aumentando ésta con la amplitud de la señal. Ello provoca que al propagarse una onda plana sinusoidal ésta se transforme progresivamente en las bien conocidas ondas en "N" o diente de sierra; hasta el punto de llegar a formarse discontinuidades u ondas de choque. En el dominio frecuencial se traduce a la generación progresiva de armónicos de la frecuencia de la perturbación inicial a medida que la onda se propaga. Debido a que en el dominio computacional los campos son discretos, la generación de armónicos superiores provoca aliasing espacial cuando la frecuencia espacial de las perturbaciones no se puede representar en la malla discreta, es decir: $\lambda_{min}=2\Delta h$. Así, para atenuar los armónicos cercanos a la frecuencia límite y garantizar la estabilidad del método se ha incorporado un término de viscosidad artificial. Estas pérdidas se implementan mediante un término difusivo, de igual manera que se ha modelado viscosidad física en el fluido. El valor del coeficiente de viscosidad artificial η_A ha de ser proporcional a Δh^2 para asegurar que cuando $\Delta h \rightarrow 0$ el esquema numérico es consistente. La consistencia del esquema numérico junto con el cumplimiento de las anteriores condiciones de estabilidad asegura la convergencia de la solución numérica a la solución física. Así, la viscosidad artificial η_A se añade a la ecuación de movimiento como:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right) + \nabla p - (\eta + \eta_A)\nabla^2\mathbf{v} - \left(\eta_B + \frac{1}{3}\eta\right)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) = 0 \tag{18}$$

En el caso en el que la no linealidad del problema esté muy acusada, asegurar la estabilidad sólo con viscosidad artificial puede suponer un gran incremento de difusión numérica, por lo que la solución a baja frecuencia puede verse también distorsionada. En estos casos se puede recurrir a un operador de orden superior para asegurar la estabilidad no lineal. En este trabajo se ha recurrido a un término del tipo (12), que se ejecuta iterativamente en cada paso temporal tras evaluar la ecuación de movimiento:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} - \alpha\nabla\left(\log\left((\nabla\cdot\mathbf{v})^2 + 1\right)\right)|\nabla\cdot\mathbf{v}|\nabla\cdot\mathbf{v} \tag{19}$$

Como se puede observar el término actúa de manera no lineal sobre las componentes de velocidad que tienen un gradiente elevado, dejando las formas de onda de bajas frecuencias espaciales intactas. El parámetro α se diseña a medida y depende sensiblemente del paso temporal y de la mínima longitud de onda permitida.

3.4 *Diseño de condiciones de contorno absorbentes: NL2L PML*

Para acotar el dominio de cálculo a una región del espacio e impedir que los contornos exteriores de esta zona produzcan reflexiones de la onda acústica hacia el interior se han diseñado condiciones de contorno absorbentes (ABC's, *absorbent boundary conditions*). El diseño numérico de las ABC's se resuelve mediante la implementación de capas de absorción tipo PML (*perfect matched layers*) basadas en la formulación en dominio temporal del método *complex coordinate stretching*[16]. Debido a que la separación en subcomponentes de los campos acústicos (*field splitting*) es compleja y computacionalmente intensiva, las capas de absorción PML no se aplicarán directamente sobre el dominio de interés no lineal, si no que se implementarán sobre un subdominio lineal acoplado sobre los contornos exteriores del dominio no lineal. (Fig. 2). Para disminuir en cierta medida las reflexiones causadas por el acoplo del subdominio lineal a la región de interés se ha diseñado una zona de transición entre ambos dominios (Fig. 2). A este diseño de ABC's lo denominaremos NL2L PML, (*no linear to linear perfect matched layers*). Sobre la zona de transición se emplea una función de ponderación espacial $L(i,j)$ sobre los términos no lineales del sistema de ecuaciones, de manera que dicha función toma valores en el intervalo [0,1]. Así, cuando $L(i,j)$ toma el valor de 0, los términos no lineales del modelo se anulan mientras que cuando la función vale 1 el esquema numérico es idéntico al de la región de interés central.

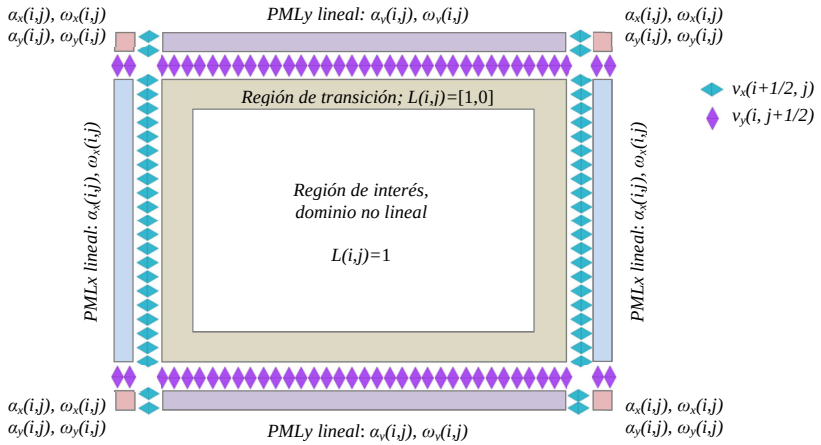


Figura 2. Implementación de PML y capas de acoplamiento sobre el dominio bidimensional.

Por último, es sobre los subdominios externos lineales donde se aplican las PML. Sobre esta región es sencillo realizar la separación de los campos de presión y densidad en sus componentes ficticias. Los dominios se acoplan mediante elementos discretos de velocidad. Así, la formulación de las PML mediante el método *complex coordinate stretching* conduce a las ecuaciones constitutivas en régimen lineal siguientes:

$$p' = p^x + p^y \qquad p' = c_0^2 \rho' \tag{20}$$

$$\alpha_x \frac{\partial v_x}{\partial t} + \omega_x v_x = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \alpha_y \frac{\partial v_y}{\partial t} + \omega_y v_y = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{21}$$

$$\alpha_x \frac{\partial p^x}{\partial t} + \omega_x p^x = -\rho_0 c_0^2 \frac{\partial v_x}{\partial x} \qquad \alpha_y \frac{\partial p^y}{\partial t} + \omega_y p^y = -\rho_0 c_0^2 \frac{\partial v_y}{\partial y} \tag{22}$$

Dónde p^x es la componente ficticia x de la magnitud escalar presión, y de manera análoga para las demás componentes, α_x y α_y son funciones espaciales de escalado y ω_x, ω_y son funciones

espaciales de atenuación de la de la PML. Así, la función $\omega(i,j)$ se diseña habitualmente con un perfil cuadrático desde 0 en la interfase entre la PML y la región de interés hasta ω_{max} en el contorno exterior del domino. El valor de $\omega(i,j)$ está ligado a la rapidez con que la onda se amortigua en el interior de la capa, además de representar la frecuencia máxima que podrá ser absorbida por la condición de contorno. Un diseño común para este parámetro es escoger $\omega_{max}=2\pi f_{max}$ siendo f_{max} la frecuencia máxima de la onda incidente. Por otro lado, la función de escalado $\alpha(i,j)$ provoca una compresión espacial de la onda cuando su valor es mayor que 1, por lo que es mayor el número de longitudes de onda contenidas en el interior de la capa PML. Ello es de gran utilidad para disminuir el espesor de la capa, tomando valores de 1 en el límite de interés hasta valores de α_{max} en el contorno externo. El valor de α_{max} también puede fijarse para maximizar la compresión de la onda pero evitando el aliasing espacial de las longitudes de onda pequeñas. Así, el valor de α_{max} se puede escoger como:

$$\alpha_{max} = \frac{1}{2\Delta h}\frac{c_{min}}{f_{max}} \tag{23}$$

Donde c_{min} es la mínima velocidad de propagación de la onda en la capa PML. Al igual que la función de atenuación $\omega(i,j)$, la función de escalado $\alpha(i,j)$ se diseña comúnmente con un perfil cuadrático, aunque en este trabajo se ha comprobado que con un valor de exponente igual 2,8 se obtienen reflexiones más atenuadas, por lo que el espesor de la capa puede ligeramente inferior.

Las condiciones de contorno interiores se definen conectando el dominio no lineal y el lineal mediante un vector de elementos discretos de velocidad. Así, el valor de los elementos comunes de velocidad de partícula se calculará a partir de los valores de presión de la zona no lineal interior y del subdominio lineal de cada capa PML. Por ejemplo, los valores de la interfase $PMLx$ (capa de la izquierda en la figura 2) se calcularán como:

$$\frac{v_{x,bound(j)}^{(n+\frac{1}{2})} - v_{x,bound(j)}^{(n-\frac{1}{2})}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{p_{PMLx(end,j)}^{(n)} - p_{nolineal(1,j)}^{(n)}}{\Delta h} \tag{24}$$

Los coeficientes de atenuación de las condiciones de contorno diseñadas se muestran para diferentes potencias y espesores de la capa PML en la siguiente figura:

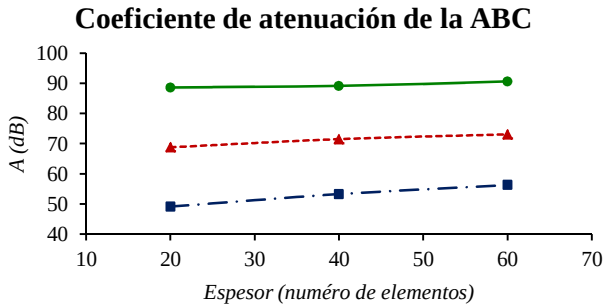


Figura 3. Coeficientes de atenuación de las condiciones de contorno absorbentes para distintos regímenes y espesores. Verde sólida: baja potencia (distancia de shock = 88.8m); roja punteada potencia media (x shock = 8.8m); azul discontinua muy alta potencia (x shock = 0.8m)

4 RESULTADOS

Para la validación del método se ha procedido a comparar la solución numérica con la solución analítica de Bessel-Fubini[2] para una onda plana sin disipación en la región de preshock. En la figura 4 se muestra la evolución espacial de la amplitud de los coeficientes de Fourier para la

frecuencia fundamental y los tres primeros armónicos de la onda plana. A medida que la onda armónica se propaga, la energía del tono fundamental pasa progresivamente a los armónicos superiores. Para σ=1 se forma la onda de choque por lo que los coeficientes de Fourier en ese punto son los de una señal en diente de sierra. La solución numérica sin pérdidas describe correctamente todo el proceso, además de predecir correctamente la distancia a la que el shock aparece, pero para distancias mayores a la distancia de shock no es posible obtener una solución numérica sin disipación con el método propuesto.

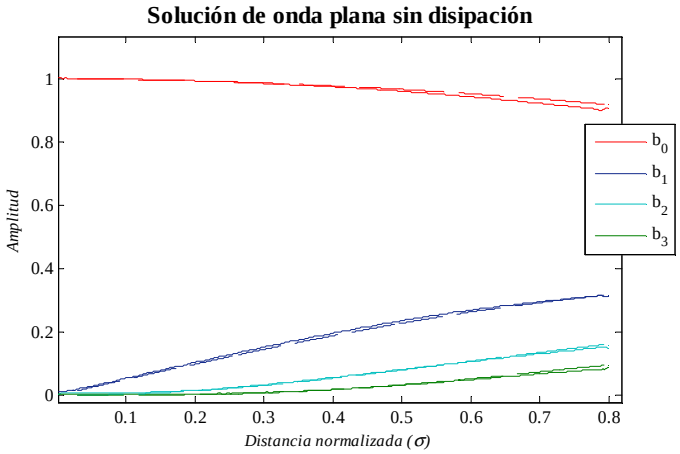


Figura 4. Solución para los coeficientes de Fourier para una onda plana sin disipación (ε=0) en la región de preshock normalizada (σ<1). Línea sólida solución numérica, línea discontinua solución analítica (Bessel-Fubini).

Una vez comprobado que el método se ajusta correctamente a la solución analítica de campos acústicos no lineales se ha diseñado una simulación acústica de un dispositivo ultrasónico focalizado. La apertura del transductor era de 50.2 mm, la focal geométrica 157 mm y la frecuencia 222.7 kHz. Los máximos de presión para diferentes potencias se muestran en la figura 5.

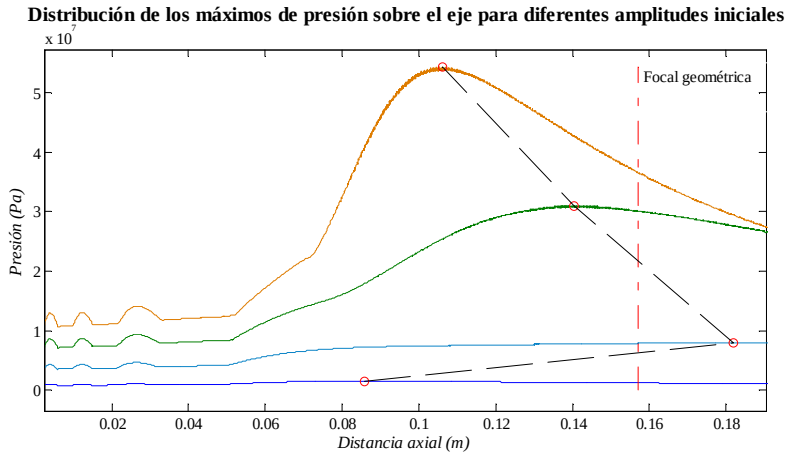


Figura 5. Distribución de la presión máxima a lo largo del eje para diferentes potencias de entrada al transductor focalizado.

Podemos apreciar como el foco real se desplaza del foco geométrico en función de la presión de entrada. Así, el desplazamiento del foco muy baja potencia, conocido como *linear shift*, es debido a la difracción del haz y por tanto, función de la frecuencia. Sin embargo, el análisis de

la propagación del haz en régimen no lineal permite obtener además el desplazamiento real del foco observado en medidas experimentales (19,20), efecto conocido como *nolinear shift*. Es importante citar que, aunque en estos resultados se observe una tendencia similar a los expuestos en (19,20), éstos no pueden ser directamente comparados con las medidas experimentales debido a que la simulación se realiza sobre un dominio bidimensional y los resultados empíricos son, por supuesto, tridimensionales.

La caracterización de la presión de radiación para un fluido viscoso también puede ser resuelta mediante el método numérico propuesto. Así esta herramienta puede ser empleada para predecir la presión de radiación así como el flujo o *streaming* del fluido viscoso para, por ejemplo, un transductor focalizado inmerso en un fluido termoviscoso. En la figura 6 se muestra la distribución espacial de la presión y la presión de radiación a lo largo del eje del transductor focalizado. La presión de radiación se ha calculado a partir de la presión promedio en un periodo[17]:

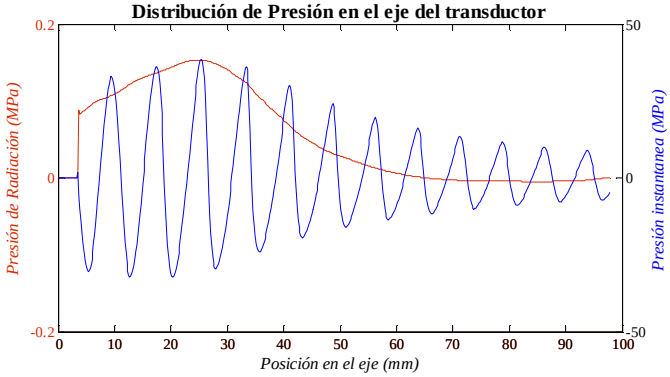


Figura 6. Distribución de la presión y la presión de radiación para un transductor focalizado de 20 mm de focal.

Por otro lado, ya que el método propuesto resuelve el campo vectorial velocidad de partícula, podemos obtener el *streaming* generado por el transductor focalizado sobre el fluido viscoso. Así, en la siguiente figura se representa el movimiento promedio en un periodo del fluido viscoso en el estado estacionario del haz ultrasónico.

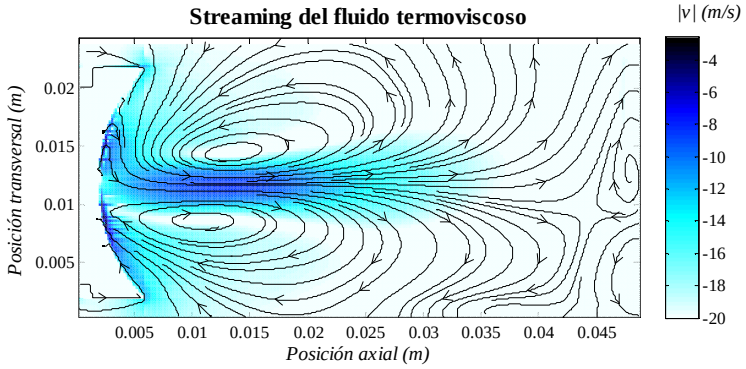


Figura 7. Distribución del streaming estacionario generado por el transductor focalizado de apertura 20 mm y focal 20 mm.

5 CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un método numérico en dominio temporal para la simulación acústica de fluidos con pérdidas termoviscosas en régimen no lineal. El método describe correctamente los diferentes efectos no lineales inherentes a la propagación de ondas acústicas en fluidos como la generación progresiva de armónicos, generación paramétrica, ondas de choque, presión de radiación, *streaming*, etc. Así, el método es adecuado para obtener soluciones a problemas con condiciones iniciales y de contorno arbitrarias en los que la solución analítica es complicada o imposible. Particularmente el método se ha desarrollado para dominios bidimensionales, pero análogamente se puede extrapolar a dominios tridimensionales u otros sistemas de coordenadas curvilíneos, axisimétricos, etc. Por otro lado, se ha diseñado un método de adaptación para el diseño de las ABC's así como de las condiciones necesarias para la estabilidad lineal (condición CFL) y no lineal (viscosidad artificial y término de orden superior).

6 REFERENCIAS

1 Hamilton, Mark F.; Blackstock, David T. "Nonlinear Acoustics: Theory and Applications". *Academic Press;* 1st edition (1997)

2 Enflo, B.O; Hedberg. C.M. "Theory of Nonlinear Acoustics in Fluids (Fluid Mechanics and Its Applications)" *Springer*; 1 edition (2002)

3 Naugolnykh, K.; Ostrovsky, L. "Nonlinear Wave Processes in Acoustics" *Cambridge University Press* (1998)

4 Hallaj, I. M.; Cleveland, R. O. "FDTD simulation of finite-amplitude pressure and temperature fields for biomedical ultrasound." *J. Acoust. Soc. Am.* 105:7 (1999)

5 T. Christopher, ''Finite amplitude distortion-based inhomogeneous pulse echo ultrasonic imaging'' *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* 44, 125-139 (1997)

6 Lee, Y. S. Hamilton, M. F. ''Time-domain modeling of pulsed finite amplitude sound beams'' *J. Acoust. Soc. Am*. 97, 906-917 (1995)

7 Yang, X.; Cleveland, R. O."Time domain simulation of nonlinear acoustic beams generated by rectangular pistons with application to harmonic imaging." *J. Acoust. Soc. Am*.117:113 (2005)

8 Botteldooren, D. "Numerical model for moderately nonlinear sound propagation in three-dimensional structures" *J. Acoust. Soc. Am.* 100:3 (1996)

9 Ginter, S. et al. "Full-wave modeling of therapeutic ultrasound: Nonlinear ultrasound propagation in ideal fluids" *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 111:5, 2049-2059 (2002)

10 Nabavi, M.; Kamran, M. H.; Dargahi, J. "A fourth-order accurate scheme for solving one-dimensional highly nonlinear standing wave equation in different thermoviscous fluids" *Journal of Computational Acoustics,* Vol. 16, No. 4 (2008) 563–576

11 Vanhille, C.; Campos-Pozuelo, C. "Numerical simulation of two-dimensional nonlinear standing waves" *J. Acoust. Soc. Am.* 116:194-200 (2004)

12 Landau, L.D.; Lifshitz, E.M; "Fluid Mechanics" *Butterworth-Heinemann.* 2ª ed. (1987)

13 LeVeque, R. J.; "Numerical Methods for Conservation Laws" *Lectures in Mathematics*, ETH-Zurich Birkhauser-Verlag, Basel, 1990. ISBN 3-7643-2464-3

14 Lax, P.D; Wendroff, B. "Systems of conservation laws". *Commun. Pure Appl Math*. 13: 217–237 (1960)

15 Lax, P. D.; Richtmyer, R. D. "Survey of the stability of linear finite difference equations" *Comm. Pure Appl. Math.* 9, 267-293 (1956)

16 Liu, Q. H.; "Perfectly matched layers for elastic waves in cylindrical and spherical coordinates" *J. Acoust. Soc. Am.* 105:4 (1999)

17 Rudenko, O. V.; Sarvazyan, A. P. Emelianov, S. Y. "Acoustic radiation force and streaming induced by focused nonlinear ultrasound in a dissipative médium" *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 99:5, pp. 2791-2798 (1996)

18 Pierce, A. D. "Acoustics: an introduction to its physical principles and applications" *Acoustical Society of America*, New York, (1991)

19 Yu. Makov, V.J. Sánchez-Morcillo, F. Camarena, V. Espinosa."Nonlinear change of on-axis pressure and intensity maxima positions and its relation with the linear focal shit effect", *Ultrasonics* 48, 678-686 (2008).
20 Adrián. S. "Caracterización del Campo Acústico Generado por Transductores Focalizados". Master's Thesis. Universidad Politécnica de Valencia. 2009

Anexo A: Discretización de las ecuaciones mediante interpolación conservativa

A.1. Ecuación de continuidad

En el que el tiempo discreto $n=t/\Delta t$, y el espacio discreto es $i=x/\Delta h$ y $j=y/\Delta h$. Así, la discretización mediante diferencias finitas centradas de la ecuación de continuidad tendrá que aproximar los diferentes términos en el instante discreto $t=n+1/2$ y la posición en la malla $x=i$, $y=j$, siendo necesaria la interpolación espacial y temporal de las magnitudes en muchos casos. Repetimos por conveniencia la ecuación de conservación de masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)+v_x\frac{\partial \rho}{\partial x}+v_y\frac{\partial \rho}{\partial y}=0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\cong\frac{\rho_{(i,j)}^{(n+1)}-\rho_{(i,j)}^{(n)}}{\Delta t} \tag{25}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)\cong\left(\rho_0+\frac{\rho_{(i,j)}^{(n+1)}+\rho_{(i,j)}^{(n)}}{2}\right)\left(\frac{v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}-v_{x\left(i-\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{\Delta h}+\frac{v_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}-v_{y\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{\Delta h}\right) \tag{26}$$

$$v_x\frac{\partial \rho}{\partial x}\cong\frac{v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}+v_{x\left(i-\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2}\left(\frac{\frac{\rho_{(i,j)}^{(n)}+\rho_{(i,j)}^{(n+1)}}{2}+\frac{\rho_{(i+1,j)}^{(n)}+\rho_{(i+1,j)}^{(n+1)}}{2}}{2}-\frac{\frac{\rho_{(i-1,j)}^{(n)}+\rho_{(i-1,j)}^{(n+1)}}{2}+\frac{\rho_{(i,j)}^{(n)}+\rho_{(i,j)}^{(n+1)}}{2}}{2}}{\Delta h}\right) \tag{27}$$

$$v_y\frac{\partial \rho}{\partial y}\cong\frac{v_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}+v_{y\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2}\left(\frac{\frac{\rho_{(i,j)}^{(n)}+\rho_{(i,j)}^{(n+1)}}{2}+\frac{\rho_{(i,j+1)}^{(n)}+\rho_{(i,j+1)}^{(n+1)}}{2}}{2}-\frac{\frac{\rho_{(i,j-1)}^{(n)}+\rho_{(i,j-1)}^{(n+1)}}{2}+\frac{\rho_{(i,j)}^{(n)}+\rho_{(i,j)}^{(n+1)}}{2}}{2}}{\Delta h}\right) \tag{28}$$

A.2. Ecuación de movimiento, componente x

Análogamente, la componente x de la ecuación de movimiento, que repetimos por conveniencia, se han de discretizar aproximando todos los términos en el instante discreto $t=n$ y en la posición de la malla $x=i+1/2$, $y=j$, los diferentes términos se pueden escribir como:

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t}+\rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}-\eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}-\left(\zeta+\frac{1}{3}\eta\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)=0 \tag{13}$$

$$\rho \cong \rho_0 + \frac{\rho^{(n)}_{(i,j)} + \rho^{(n)}_{(i+1,j)}}{2} \tag{29}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} \cong \frac{v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} - v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)}}{\Delta t} \tag{30}$$

$$v_x \cong \frac{v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2} \tag{31}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \cong \frac{\frac{\frac{v_{x\left(i-\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{x\left(i-\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2} + \frac{v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2}}{2} - \frac{\frac{v_{x\left(i-\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{x\left(i-\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2} + \frac{v_{x\left(i-\frac{3}{2},j\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{x\left(i-\frac{3}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2}}{2}}{\Delta h} \tag{32}$$

$$v_y \cong \frac{\frac{\frac{v_{y\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{y\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2} + \frac{v_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2}}{2} + \frac{\frac{v_{y\left(i+1,j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{y\left(i+1,j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2} + \frac{v_{y\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{y\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2}}{2}}{2} \tag{33}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \cong \frac{\frac{\frac{v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2} + \frac{v_{x\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{x\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2}}{2} - \frac{\frac{v_{x\left(i+\frac{1}{2},j-1\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{x\left(i+\frac{1}{2},j-1\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2} + \frac{v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2}}{2}}{\Delta y} \tag{34}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cong \frac{p^{(n)}_{(i,j)} + p^{(n)}_{(i+1,j)}}{\Delta h} \tag{35}$$

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \cong \eta \frac{\frac{v_{x\left(i-\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{x\left(i-\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2} - 2\frac{v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2} + \frac{v_{x\left(i+\frac{3}{2},j\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{x\left(i+\frac{3}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2}}{\Delta h^2} \tag{36}$$

$$\left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) \cong \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\frac{\left(\frac{v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} - v_{x\left(i-\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{\Delta h} + \frac{v_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} - v_{y\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{\Delta h}\right) - \left(\frac{v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} - v_{x\left(i-\frac{3}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{\Delta h} + \frac{v_{y\left(i-1,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} - v_{y\left(i-1,j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{\Delta h}\right)}{\Delta h} \tag{37}$$

A.3. Ecuación de movimiento, componente y

Los términos de la componente *y* de la ecuación de movimiento, que repetimos por conveniencia se han de discretizar en el instante $t=n$ y en la posición de la malla $x=i$, $y=j+1/2$:

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho\left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial p}{\partial y} - \eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} - \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0 \tag{14}$$

$$\rho \cong \rho_0 + \frac{\rho_{(i,j)}^{(n)} + \rho_{(i,j+1)}^{(n)}}{2} \tag{38}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} \cong \frac{v_{x\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} - v_{x\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)}}{\Delta t} \tag{39}$$

$$v_y \cong \frac{v_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{x\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2} \tag{40}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} \cong \frac{\frac{\frac{v_{y\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{y\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2} + \frac{v_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2}}{2} - \frac{\frac{v_{y\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{y\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2} + \frac{v_{y\left(i,j-\frac{3}{2}\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{y\left(i,j-\frac{3}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2}}{2}}{\Delta h} \tag{41}$$

$$v_x \cong \frac{\frac{\frac{v_{x\left(i-\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{x\left(i-\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2} + \frac{v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2}}{2} + \frac{\frac{v_{x\left(i-\frac{1}{2},j+1\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{x\left(i-\frac{1}{2},j+1\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2} + \frac{v_{x\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{x\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2}}{2}}{2} \tag{42}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} \cong \frac{\frac{\frac{v_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2} + \frac{v_{y\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{y\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2}}{2} - \frac{\frac{v_{y\left(i-1,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{y\left(i-1,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2} + \frac{v_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2}}{2}}{\Delta h} \tag{43}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \cong \frac{p_{(i,j)}^{(n)} + p_{(i,j+1)}^{(n)}}{\Delta h} \tag{44}$$

$$\eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \cong \eta \frac{\frac{v_{y\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{y\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2} - 2\frac{v_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2} + \frac{v_{y\left(i,j+\frac{3}{2}\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + v_{y\left(i,j+\frac{3}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2}}{\Delta h^2} \tag{45}$$

$$\left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) \cong \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\frac{\left(\frac{v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} - v_{x\left(i-\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{\Delta h} + \frac{v_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} - v_{y\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{\Delta h}\right) - \left(\frac{v_{x\left(i+\frac{1}{2},j-1\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} - v_{x\left(i-\frac{1}{2},j-1\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{\Delta h} + \frac{v_{y\left(i-1,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} - v_{y\left(i-1,j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{\Delta h}\right)}{\Delta h} \tag{46}$$

A.4. Ecuación de estado

Por último, los términos de la ecuación de estado se han de discretizar en el instante $t=n$ y en la posición de la malla $x=i$, $y=j$:

$$-\kappa\left(\frac{1}{C_V}-\frac{1}{C_p}\right)\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)\cong-\kappa\left(\frac{1}{C_V}-\frac{1}{C_p}\right)\left(\frac{\frac{v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)}+v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2}-\frac{v_{x\left(i-\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)}+v_{x\left(i-\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2}}{\Delta h}+\frac{\frac{v_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)}+v_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2}-\frac{v_{y\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)}+v_{y\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2}}{\Delta h}\right) \quad (47)$$