TECNIACUSTICA Cáceres · 2011

42º CONGRESO NACIONAL DE ACÚSTICA

PREDICCIÓN NUMÉRICA DE ONDAS ACÚSTICAS DE AMPLITUD FINITA BAJO CONDICIONES DE CONTORNO ARBITRARIAS

PACS: 43.80.Sh, 43.35.Wa, 87.50.yt, 02.70.Bf

Noé Jiménez[1], Javier Redondo[1], Bernardino Roig[1], Rubén Picó[1], Víctor Sánchez-Morcillo[1], Francisco Camarena[1]

[1] *Instituto para la Gestión Integrada de Zonas Costeras (IGIC), Universidad Politécnica de Valencia, Escuela Politécnica Superior de Gandía. C/Paraninf 1, 46730 Grao de Gandía, Valencia, Spain. Email: nojigon@upv.es*

ABSTRACT

This work present a numerical method based on FDTD (Finite Differences in Time Domain) for the prediction of finite amplitude acoustic waves. The discrete operators are applied over the entire constitutive equations of the problem derived for conservation laws. The method correctly describe backscattering, arbitrary boundary and initial conditions can be used. For guaranty the convergence the method robust stability conditions based in localized artificial viscosity are added. The method is validated with nonlinear acoustics analytic solutions and experimental results for high intensity focalized ultrasound devices.

RESUMEN

Se presenta un método computacional, basado en diferencias finitas en dominio temporal (FDTD), para el cálculo de ondas acústicas de amplitud finita. Los operadores discretos son aplicados sobre el sistema de ecuaciones constitutivas derivadas de las leyes conservativas que describen el comportamiento de perturbaciones acústicas en régimen no lineal. El método describe backscattering y condiciones de contorno e iniciales arbitrarias, y para garantizar la convergencia incorpora robustas condiciones de estabilidad basadas en viscosidad artificial localizada. El método se ha validado con resultados experimentales y con soluciones analíticas para haces de ultrasonidos focalizados de alta intensidad.

1 INTRODUCCIÓN

Son multitud las aplicaciones en acústica que no pueden ser descritas en su totalidad por la aproximación lineal para pequeña señal de las ondas acústicas. El avance en la investigación y el desarrollo en estos casos necesitan de herramientas de análisis y predicción de los campos acústicos en régimen no lineal. Debido al complejo, y en algunos casos imposible, tratamiento matemático para encontrar una solución analítica del problema acústico hacen imprescindible el uso de técnicas de simulación numérica para la predicción de las ondas acústicas en régimen no lineal.

Actualmente existen multitud de métodos numéricos para la descripción de las ondas de amplitud finita, pero la mayoría de ellos sólo son aplicables bajo condiciones de contorno e iniciales muy concretas. Las limitaciones vienen dadas en primer lugar por las particulares del modelo físico que resuelva el método computacional. Así, existen métodos para resolver modelos que sólo describen ondas viajando en una dirección (*one way equations*) como la ecuación de Burgers [1] o el modelo KZK para haces acústicos resuelto en dominio frecuencial [2], en dominio temporal para haces axisimétricos [3] o la generalización en 3D para haces sin simetría en fluidos termoviscosos [4]. De entre los modelos que incorporan backscattering podemos destacar la ecuación de Westervelt que ha sido resuelta mediante técnicas numéricas basadas en FDTD [5].

Existen también métodos numéricos para resolver el sistema de ecuaciones constitutivas sin necesidad de simplificar el modelo físico restringiéndolo a condiciones de contorno particulares. En dominio temporal, las ecuaciones de Navier-Stokes pueden ser resueltas mediante FDTD [6], para ondas acústicas en fluidos ideales [7] o para gases [8]. Para el caso concreto de fluido Newtoniano e irrotacional se pueden resolver numéricamente en coordenadas Lagrangianas [9].

En el presente trabajo se propone un método numérico para resolver el sistema completo de ecuaciones constitutivas para fluidos en régimen no lineal mediante el empleo de técnicas FDTD. El método propuesto contempla los procesos de viscosidad transversal y volumétrica del fluido así como de no linealidades de orden cúbico.

2 ECUCIONES CONSTITUTIVAS

Las ecuaciones que rigen la dinámica del problema se derivan de los principios de conservación de masa, momento y energía sobre un fluido viscoso que, despreciando los efectos de transferencia de calor y teniendo en cuenta los efectos de no linealidad cúbica del fluido conduce a las siguientes expresiones [10]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right) + \nabla p - \eta\nabla^2\mathbf{v} - \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \tag{2}$$

$$p(\rho, s) \tag{3}$$

Definiendo un sistema de coordenadas cilíndricas y suponiendo simetría axial, podemos obtener las relaciones para las distintas componentes a partir de las relaciones constitutivas (1, 2, 3). La ecuación de conservación de masa (1) se puede expresar como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_t\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + v_r\frac{\partial \rho_t}{\partial r} + v_z\frac{\partial \rho_t}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

La ecuación de conservación del momento (3) se descompone en dos expresiones para las dos componentes de velocidad:

$$\begin{aligned}&\rho_t\frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r} + \rho_t\left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) - \eta\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2}\right)\cdots \\ &-\left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r\partial z} - \frac{1}{r^2}v_r\right) = 0\end{aligned} \tag{5}$$

$$\rho_t \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_t \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \cdots$$
$$- \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial z \partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = 0 \quad (6)$$

Y para cerrar el sistema, la ecuación de estado para fluidos viscosos (3) en coordenadas cilíndricas axisimétricas:

$$p' = c_0^2 \rho' + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{B}{2A} \rho'^2 + \frac{c_0^2}{\rho_0^2} \frac{C}{6A} \rho'^3 \quad (7)$$

3 METODO NUMÉRICO

Para la discretización de los campos acústicos asumimos una malla típica de los métodos FDTD [11], con los campos de presión y densidad al tresbolillo en espacio y tiempo con las componentes de la velocidad. El sistema de ecuaciones resultante es un esquema numérico explícito, es decir, $\rho(n+1,i,j)$ es función de $\rho(n,i,j)$. Sin embargo, debido a la interpolación espacial realizada, no es posible obtener una expresión algebraica sencilla de igual manera que en el caso lineal ya que $\rho(n+1,i,j)$ también depende de $\rho(n+1,i+1,j)$, de $\rho(n+1,i,j+1)$, etc. Para solventar este problema se ha empleado un método iterativo para la resolución de las incógnitas de instantes futuros que están implícitas en la formulación descrita. La implementación resulta sencilla debido a que los términos lineales son los que tienen un mayor peso en la solución numérica. Así, el algoritmo iterativo converge muy rápidamente debido a que se introduce como valor inicial la solución del problema lineal que se calcula de manera explícita mediante el método FDTD convencional (con sólo 2 iteraciones el error relativo es de -100dB respecto de la solución exacta, Figura 1. . El algoritmo incluye también condiciones de contorno absorbentes basadas en una adaptación del método PML (*perfectly matched layers*) y *complex coordinate stretching* al régimen no lineal sobre para geometría curvilínea [12].

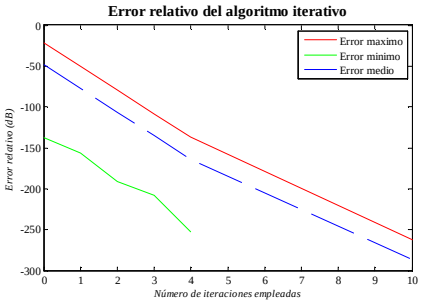


Figura 1. Convergencia: error cometido por el algoritmo iterativo diseñado en función de las iteraciones realizadas.

4 CONDICIONES DE ESTABILIDAD

El modelo descrito es un sistema hiperbólico desarrollado a partir de leyes conservativas (conservación de masa, momento y energía). Por tanto, para que la solución del método numérico converja a la solución física (en el caso de que ésta exista) se han de cumplir las condiciones del teorema de Lax-Wendroff [13]. Ello implica que el esquema numérico se ha de formular de forma conservativa; es decir, los principios de conservación enunciados por las leyes físicas se han de cumplir para cada celda del esquema numérico [14]. Si cumplimos esta condición estamos garantizando que si la solución numérica converge, lo hace a una solución débil. Aun así, el cumplimiento del citado teorema de Lax-Wendorff no satisface que el método numérico converja.

4.1 *Estabilidad Lineal*

Para asegurar la convergencia del problema no lineal se requiere además la estabilidad del esquema numérico (Teorema de equivalencia de Lax [15]). La primera condición de estabilidad para el método FDTD aquí descrito, al igual que en los sistemas hiperbólicos lineales es la

conocida condición de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) que relaciona la duración del paso temporal en función de la discretización espacial. Para una discretización uniforme mediante una malla estructurada de dimensión *D*:

$$S = c_0 \frac{\Delta t}{\Delta h \sqrt{D}} \leq 1 \tag{8}$$

Donde *S* es el denominado número de Courant, *D* es la dimensión del problema, Δt y Δh son el paso temporal y el paso espacial de la discretización.

4.2 *Estabilidad No Lineal*

La segunda condición de estabilidad para el sistema hiperbólico no lineal está ligada al tratamiento de las discontinuidades, lo que desde el punto de vista frecuencial se manifiesta como aliasing espacial. Debido a la no linealidad del termino advectivo de la ecuación de conservación del momento ($\mathbf{v}\cdot\nabla\,\mathbf{v}$), la velocidad de propagación depende de la amplitud de la velocidad de partícula, aumentando ésta con la amplitud de la señal. Ello provoca que al propagarse una onda plana sinusoidal ésta se transforme progresivamente en las bien conocidas ondas en "N" o diente de sierra; hasta el punto de llegar a formarse discontinuidades u ondas de choque. En el dominio frecuencial se traduce a la generación progresiva de armónicos de la frecuencia de la perturbación inicial a medida que la onda se propaga. Debido a que en el dominio computacional los campos son discretos, la generación de armónicos superiores provoca aliasing espacial cuando la frecuencia espacial de las perturbaciones no se puede representar en la malla discreta, es decir: $\lambda_{min}=2\Delta h$. Para controlar este fenómeno se han de implementar técnicas numéricas que aseguren la estabilidad del método en régimen lineal.

La estrategia más simple para limitar la aparición de armónicos superiores que la malla no puede representar y garantizar la estabilidad del método es incorporar un término de viscosidad artificial sobre todo el dominio [7]. Estas pérdidas se implementan mediante un término difusivo, de igual manera que se ha modelado viscosidad física en el fluido. El valor del coeficiente de viscosidad artificial η_A ha de ser proporcional a Δh^2 para asegurar que cuando $\Delta h \rightarrow 0$ el esquema numérico es consistente. Sin embargo, la solución también se ve afectada por la difusión extra ya este proceso es equivalente a alterar las propiedades físicas del fluido que tratamos de simular. Por ello, añadir viscosidad a todo el fluido presenta serios inconvenientes y solo ofrece resultados aceptables en casos de no linealidad débil.

Viscosidad Artificial Localizada

Una manera de solventar los inconvenientes de la difusión artificial de manera no localizada es diseñar operadores numéricos que permitan describir las regiones del espacio sobre las que se concentran las longitudes de onda pequeñas y/o los frentes de choque. Así, con la información aportada por ellos se puede controlar la estabilidad no lineal del algoritmo de manera dinámica y localizada añadiendo viscosidad sobre una región concreta del espacio. Dichos operadores se pueden construir mediante funciones no lineales, de manera que se anulen por completo en las regiones del espacio en las que la solución se quiera preservar sin alterar en absoluto. En este trabajo se ha empleado el siguiente operador discreto ϕ para las celdas de presión i:

$$\phi_i = p_{i+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}} \tag{9}$$

Posteriormente calculamos la magnitud de las diferencias finitas a uno y a otro lado de la celda de la siguiente manera:

$$\phi_{mag} = \frac{1}{2}\left(\left(\phi_i - \phi_{i+1}\right)^2 + \left(\phi_i - \phi_{i-1}\right)^2\right) \tag{10}$$

Normalizamos el operador a las dimensiones del problema e introducimos la constante ε << ϕ para evitar la divergencia en la división por cero en el procesado. Podemos seleccionar un valor para ε del orden de 10^{-20} aunque depende de la precisión finita empleada.

$$r_i = \frac{\phi_{mag}}{c_0^2 \Delta h^2} + \varepsilon \tag{11}$$

Para que el operador σ_i tome valores entre $0< \sigma_i<1$, debemos ajustar el parámetro r_{th} para delimitar el umbral a partir del cual se añadirá viscosidad numérica. Así, para gradientes pequeños $r_i < r_{th}$ la función σ_i es cero y no añade viscosidad, mientras que para las zonas con gradientes elevados $r_i > r_{th}$ se añade viscosidad en función de la magnitud del gradiente en esa zona en el rango $0< \sigma_i<1$. Como caso particular, para $\sigma_i \to 1$, $r_i \to +\infty$.

$$\sigma_i = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r_{th}}{r_i} + \left|1 - \frac{r_{th}}{r_i}\right|\right) \tag{12}$$

Finalmente la viscosidad localizada se introduce en el sistema de ecuaciones en el término difusivo de la viscosidad natural:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right) + \nabla p - (\eta + \sigma)\nabla^2 \mathbf{v} - \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \tag{13}$$

En la Figura 2 y Figura 3 se muestra la solución numérica obtenida con este método para una onda plana de amplitud finita viajando en la dirección +x computada con los métodos de viscosidad artificial. Podemos observar como la aplicación de la viscosidad localizada alcanza la estabilidad no lineal preservando por completo los frentes de onda que contienen longitudes de onda largas y atenuando los armónicos que la malla es capaz de soportar. Es importante señalar que para la solución cercana a la lineal de onda de muy baja amplitud este método no introduce alteración alguna.

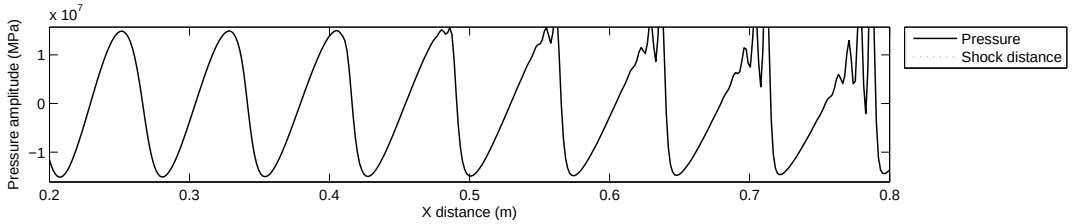


Figura 2. Solución numérica sin control de la estabilidad no lineal para una onda plana de amplitud finita en agua. Como se puede observar a medida que se generan amónicos en la propagación que la malla no puede representar la solución numérica diverge y en última instancia se vuelve inestable.

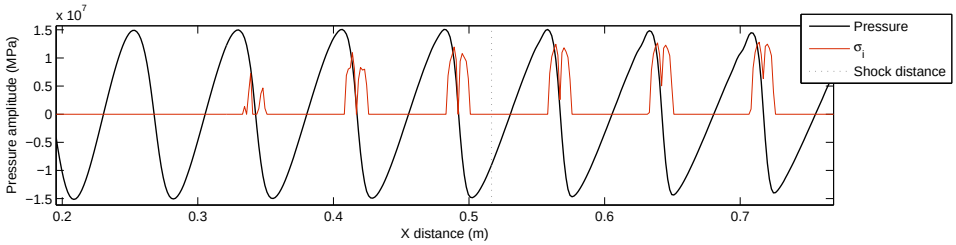


Figura 3. Solución numérica con viscosidad artificial localizada. Negro: perfil de la onda de presión, rojo, función discreta de viscosidad localizada σ_i. Como se puede observar este método asegura la estabilidad mientras que preserva por completo aquellas regiones del dominio que no requieren tratamiento de estabilidad no lineal.

5 VALIDACIÓN ANALÍTICA

5.1 *Comparación con soluciones analíticas en régimen Lineal*

La validación del método en régimen lineal se ha realizado mediante comparación con la solución analítica de la envolvente de presión sobre el eje del transductor proporcionada por O'Neil [16]. A medida que la refinamos el mallado la solución de un método numérico estable y consistente converge a la solución analítica. Podemos observar este comportamiento en la Figura 4 para la envolvente de presión sobre el eje del transductor.

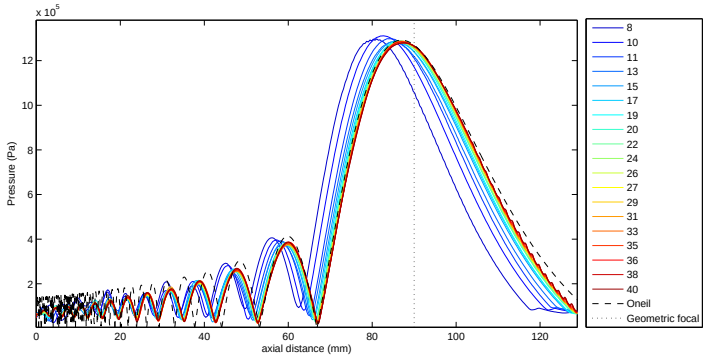


Figura 4. Envolvente de la presión en el eje del transductor para distintas resoluciones de malla. Curvas cromáticas desde azul a rojo: solución numérica para mallas desde 8 a 40 elementos por longitud de onda. Curva negra discontinua: solución analítica válida en la zona focal.

Analizando más en profundidad el caso de las focales podemos representar la convergencia del método en función de los elementos por longitud de onda para la estimación de la focal real del transductor. Figura 5.

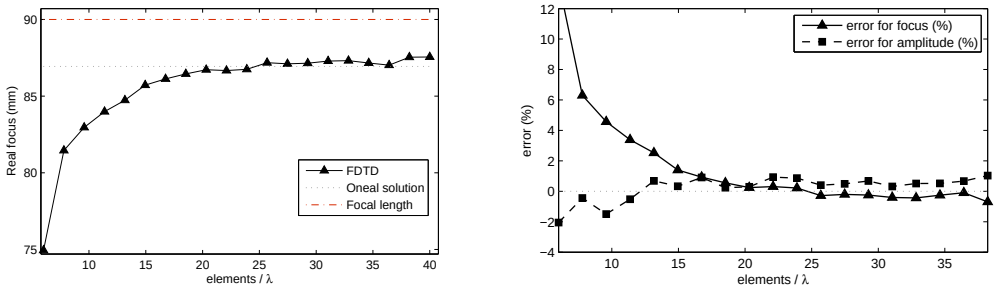


Figura 5. Izquierda: convergencia para la focal real del transductor. A medida que aumentamos los elementos por longitud de onda, la solución numérica converge a la analítica. Derecha: convergencia (error relativo %) para la estimación numérica de la focal y del máximo de amplitud.

Si además calculamos como converge el algoritmo para la estimación del pico de amplitud podemos estimar que con una resolución de N=20 elementos por longitud de onda el error relativo está por debajo de 0.24% para la focal del transductor y por debajo de 0.29% para la determinación del valor de pico en la amplitud de presión en el foco.

5.2 *Comparación con soluciones analíticas en régimen No Lineal*

Para la validación del método en régimen no lineal se ha procedido a comparar la solución numérica con la solución analítica de Bessel-Fubini [10] para una onda plana sin disipación en la región de preshock y con la solución de Blackstock [17] con disipación en la región de postshock.

$$b_{n,BF} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_n(n\sigma)}{n\sigma} \qquad b_{n,B} = \frac{2}{\Gamma}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(n/\Gamma^2)\coth(n(1+\sigma)/\Gamma)}{\sinh(n(1+\sigma)/\Gamma)} \qquad (14, 15)$$

Donde $b_{n,BF}$ y $b_{n,B}$ es la amplitud de los coeficientes de Fourier para la solución de Bessel-Fubini y Blackstock respectivamente, Γ es el número de Goldberg. y $\sigma = x/x_{shock}$ es la distancia normalizada a la distancia de formación de la discontinuidad o choque. Para el caso de la propagación de una onda plana en un medio con viscosidad podemos aplicar la solución de Blackstock para distancias σ>2.8. La Figura 6 representa la presión de una onda propagándose a lo largo del eje σ en un momento dado. Podemos apreciar cómo debido a la aparición progresiva de armónicos de la frecuencia inicial, el perfil de la onda sinusoidal se distorsiona por efecto acumulativo a medida que se propaga en el dirección $+\sigma$. En σ=1 se produce una discontinuidad, y a mediad que se propaga el perfil de la onda se transforma progresivamente en un perfil en forma diente se sierra o "N". La amplitud de los armónicos en función de la distancia σ coincide con la descrita por las expresiones de Bessel-Fubini y Blackstock.

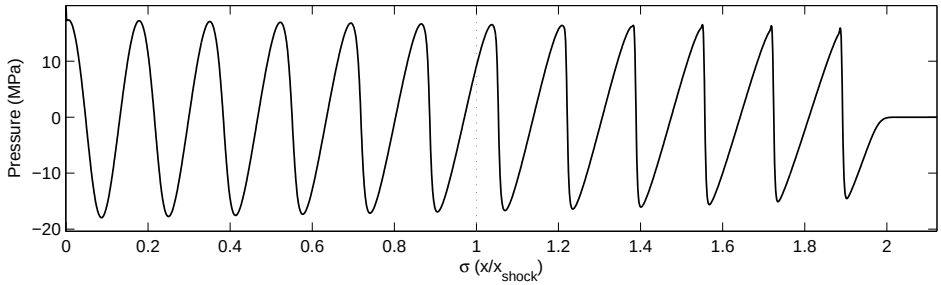


Figura 6. Solución numérica para la presión instantánea de una onda plana propagándose a lo largo del eje σ. Podemos comprobar como la onda sinusoidal inicial se distorsiona por efecto acumulativo a medida que se propaga en el dirección $+\sigma$. En σ=1 se produce una discontinuidad, y a mediad que se propaga el perfil de la onda se transforma progresivamente en un perfil en forma diente se sierra o "N".

La Figura 7 muestra la evolución espacial de la amplitud de los coeficientes de Fourier para la frecuencia fundamental y los tres primeros armónicos de la onda plana. A medida que la onda armónica se propaga, la energía de la componente fundamental pasa progresivamente a los armónicos superiores. Para σ=1 se forma la onda de choque y la solución de Bessel-Fubini no es aplicable.

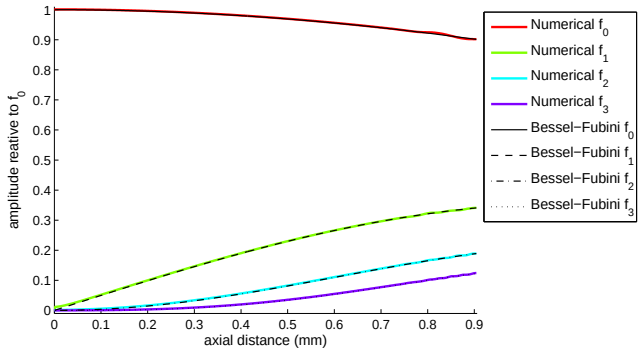


Figura 7. Solución para la amplitud de los armónicos b_n para una onda plana sin disipación (μ=0) en la región de preshock normalizada (σ<1). Línea sólida solución numérica, línea discontinua solución analítica (Bessel-Fubini).

La solución numérica sin pérdidas describe correctamente el citado proceso, además de predecir correctamente la distancia a la que el shock aparece, pero para distancias mayores a la distancia de shock no es posible obtener una solución numérica sin disipación con el método propuesto. Ello no resulta un problema ya este caso no se da nunca en la naturaleza: siempre que existe una onda de choque en un medio real existen procesos naturales de disipación. La solución analítica de Blackstock es aplicable para describir la propagación de una onda plana en un fluido viscoso, y es válido a partir de 2.8 veces la distancia de choque, Figura 8.

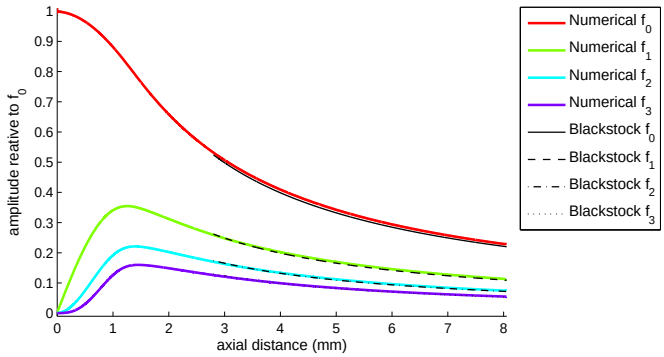


Figura 8. Solución para la amplitud de los armónicos b_n para una onda plana con disipación. Línea sólida solución numérica, línea discontinua solución analítica en la región de postshock normalizada (σ>2.8) (Blackstock).

Así, para una resolución de N=32, el error relativo para todos los armónicos está por debajo de 1.67% en la región de preshock (Bessel-Fubini) y por debajo de 2.80% en la región de

postshock (Blackstock). Como se puede observar los resultados numéricos coinciden con los ofrecidos por soluciones analíticas en régimen no lineal.

6 VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

Para la correcta validación de los resultados ofrecidos por las herramientas numéricas se han comparado éstos con medidas experimentales. Así, se ha diseñado y construido un dispositivo ultrasónico de focalización media. Posteriormente se ha procedido a la caracterización tridimensional del campo acústico generado por el dicho transductor en régimen no lineal. El elemento activo del dispositivo focalizado es una cerámica piezoeléctrica focalizada (PZ26, *Ferroperm Piezoceramics*, Denmark) con un radio de curvatura de 63 mm, apertura de 64 mm y espesor de 1.98 mm, Figura 9. La cerámica está montada sobre una carcasa de acero y teflón, y debido a que el transductor está diseñado para radiar altas potencias, no se introdujo ningún material para el *backing,* puesto que así la gran diferencia de impedancias entre la cerámica y el aire de la parte posterior provoca que el transductor radie la práctica totalidad de la potencia acústica hacia la parte frontal.

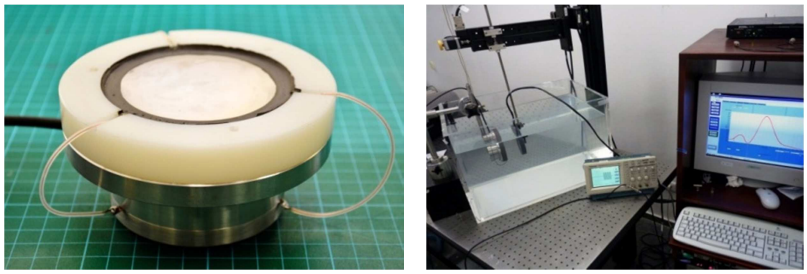


Figura 9. Izquierda: aspecto final del transductor focalizado montado. Derecha: configuración del sistema de medida.

La caracterización del campo acústico generado por el haz focalizado se realizó mediante un sistema de posicionamiento 3D de tres ejes ortogonales de 10 µm de precisión (*OWIS GmbH*), un dispositivo generador de señal (14 bits, 100 MS/s, model PXI5412, *National Instruments*) y un digitalizador (64 MS/s, model PXI5620, *National Instruments*). Todo el sistema de instrumentación está basado en el controlador *National Instruments* PXI-Technology NI8176. **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**Para la amplificación de la señal se empleó un amplificador de RF lineal (ENI 1040L, 400W, +55dB, *ENI*, Rochester, NY), y la señal de entrada y salida del amplificador fue monitorizada mediante un osciloscopio digital (TDS-220, *Tektronix*, Beaverton, Oregon). Las medidas fueron realizadas en un tanque de agua destilada de dimensiones 75×60×50 cm. El agua destilada fue introducida en el tanque asegurando un flujo laminar con el objetivo de minimizar la formación microburbujas que pudieran producirse en el trasvaso. Durante el proceso de medida se monitorizó la temperatura del agua mediante una sonda digital sumergida, que se mantuvo en el rango 24.5º a 24.8º C. El transductor de medida fue un hidrófono de membrana con *backing* NTR PVDF (0.2229 V/MPa sensitivity, model MH2000B 200 µm diámetro activo, NTR/*Onda Corp.*) que asegura una sensibilidad constante sobre un ancho de banda de 20 MHz.

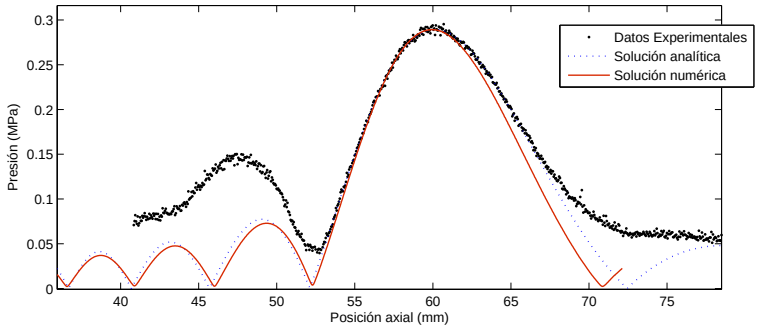


Figura 10. Corte axial para las medidas realizadas a baja potencia. Negro punteado grueso: medidas experimentales. Azul punteado: solución analítica. Rojo: solución numérica.

La Figura 10 muestra los resultados de las medidas para una presión de entrada de p_0=0.024 Pa en superficie del transductor (5 V_{pp} en bornes). Se puede observar como en la zona focal la solución analítica en régimen lineal se asemeja a la solución numérica y a las medidas experimentales.

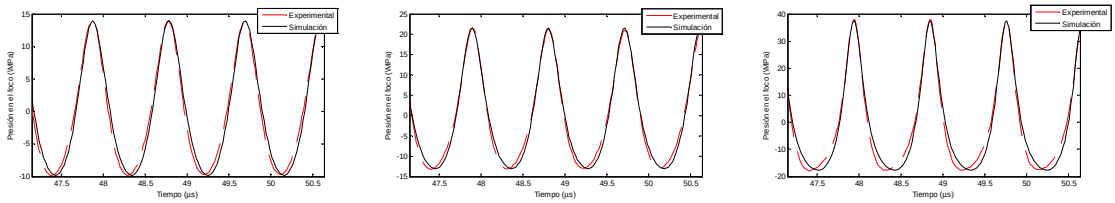


Figura 11. Comparación entre los resultados experimentales y simulación para la forma de onda capturada en el foco geométrico. Izquierda: tensión de entrada de 130 V_{pp} en bornes del transductor. Derecha: Tensión de entrada de 246 V_{pp}.

La Figura 11 muestra la comparación entre las formas de onda obtenidas experimentalmente para amplitudes elevadas (130,158, 246 V_{pp} en bornes) y los resultados de las simulaciones. Podemos observar como en todos los casos la distorsión del perfil de la onda muestra un gran grado de semejanza a la distorsión observada experimentalmente. Las pequeñas discrepancias están relacionadas con el número de armónicos incluido en cada perfil ya que la máxima resolución en frecuencia es diferente en cada caso (32 MHz experimental, 13.8 MHz simulación)

7 CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un método numérico basado en diferencias finitas en domino temporal para la descripción de campos acústicos en régimen no lineal. En el modelo se incluyen los efectos de disipación por viscosidad así como de no linealidades de orden cúbico. Así, el método es capaz de simular campos acústicos en régimen no lineal con condiciones de contorno e iniciales arbitrarias, por lo que es apto para una gran variedad de aplicaciones en acústica. A su vez se detalla la implementación de condiciones de estabilidad no lineal basadas en viscosidad artificial localizada. Ello se consigue mediante un operador discreto que permite que la solución lineal y los primeros armónicos se resuelvan sin agregar difusión artificial. El algoritmo incluye también condiciones de contorno absorbentes basadas en una adaptación del método PML (*perfectly matched layers*) y *complex coordinate stretching* al régimen no lineal.

De la validación mediante comparación con soluciones analíticas se desprende que la solución numérica ofrecida por el método converge a la solución física: para las predicciones en las que no aparecen ondas de choque el error relativo no supera el 1.67%, mientras que en la simulación de discontinuidades el error relativo se mantiene por debajo del 2.80%.

La validación mediante comparación experimental muestra como los resultados obtenidos en régimen no lineal se asemejan a los medidos experimentalmente, por lo que el método numérico es apto para la simulación de transductores focalizados de potencia.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido desarrollado gracias al proyecto FIS2008-06024-C03-03 del Ministerio de Educación y Ciencia y al Programa de Apoyo a la Investigación y Desarrollo de la Universidad Politécnica de Valencia PAID-06-10-002-295, Spain.

REFERENCIAS

1 R. O. Cleveland, M. F. Hamilton, D. T. Blackstock. “Time-domain modeling of finite-amplitude sound in relaxing fluids” *J. Acoust. Soc. Am.* 99 (6), (1996)

2 T. Christopher, ‘‘Finite amplitude distortion-based inhomogeneous pulse echo ultrasonic imaging’’ *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* 44, 125-139 (1997)

3 Lee, Y. S. Hamilton, M. F. ‘‘Time-domain modeling of pulsed finite amplitude sound beams’’ *J. Acoust. Soc. Am*. 97, 906-917 (1995)

4 Yang, X.; Cleveland, R. O."Time domain simulation of nonlinear acoustic beams generated by rectangular pistons with application to harmonic imaging." *J. Acoust. Soc. Am.*117:113 (2005)

5 Hallaj, I. M.; Cleveland, R. O. "FDTD simulation of finite-amplitude pressure and temperature fields for biomedical ultrasound." *J. Acoust. Soc. Am.* 105:7 (1999)

6 Botteldooren, D. “Numerical model for moderately nonlinear sound propagation in three-dimensional structures” *J. Acoust. Soc. Am.* 100:3 (1996)

7 Ginter, S. et al. “Full-wave modeling of therapeutic ultrasound: Nonlinear ultrasound propagation in ideal fluids” *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 111:5, 2049-2059 (2002)
8 Nabavi, M.; Kamran, M. H.; Dargahi, J. “A fourth-order accurate scheme for solving one-dimensional highly nonlinear standing wave equation in different thermoviscous fluids” *Journal of Computational Acoustics,* Vol. 16, No. 4 563–576 (2008)
9 Vanhille, C.; Campos-Pozuelo, C. “Numerical simulation of two-dimensional nonlinear standing waves” *J. Acoust. Soc. Am.* 116:194-200 (2004)
10 K. A. Naugolnykh and L. A. Ostrovskii. *Nonlinear Wave Processes in Acoustics*. Cambridge University Press, New York, NY. (1998)
11 A. Taflove and S. Hagness. *Computational Electrodynamics. The Finite Difference Time Domain method,* 3ª ed. North Artech House Inc. (2005)
12 Liu, Q. H.; “Perfectly matched layers for elastic waves in cylindrical and spherical coordinates” *J. Acoust. Soc. Am.* 105:4 (1999)
13 Lax, P.D; Wendroff, B. "Systems of conservation laws". *Commun. Pure Appl Math*. 13: 217–237 (1960)
14 R. J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhauser-Verlag, Basel, Lectures in Mathematics, ETH-Zurich, (1990)
15 Lax, P. D.; Richtmyer, R. D. “Survey of the stability of linear finite difference equations” *Comm. Pure Appl. Math.* 9, 267-293 (1956)
16 H. T. O'Neil. Theory of Focusing Radiators. *J. Acoust. Soc. Am.* 21(5), 516 (1949)
17 Mark F. Hamilton, David T. Blackstock. “Nonlinear Acoustics: Theory and Applications”. *Academic Press;* 1st Edition (1997)