TECNIACUSTICA VALLADOLID·2013

44º CONGRESO ESPAÑOL DE ACÚSTICA
ENCUENTRO IBÉRICO DE ACÚSTICA
EAA EUROPEAN SYMPOSIUM ON ENVIRONMENTAL ACOUSTICS AND NOISE MAPPING

ONDAS ACÚSTICAS DE AMPLITUD FINITA EN MEDIOS CON RELAJACIÓN: APLICACIÓN A LA MODELIZACIÓN DE TEJIDOS BIOLÓGICOS

PACS: 43.25.Cb, 43.35.Fj, 43.80.Qf, 02.70.Bf

Noé Jiménez[1], Javier Redondo[1], Víctor Sánchez-Morcillo[1], Francisco Camarena[1]

[1] *Instituto para la Gestión Integrada de Zonas Costeras (IGIC), Escuela Politécnica Superior de Gandía, Universidad Politécnica de Valencia. C/Paraninf 1, 46730 Grao de Gandía, Valencia, Spain. Email: nojigon@upv.es*

ABSTRACT

This work present a model of nonlinear acoustics in relaxing media and its numerical solution by means of finite differences. An efficient implementation of the numerical method is presented avoiding convolutional operators. Thus, by optimizing a pair of relaxing parameters the method present attenuation frequency response that fits a power law experimental data for most biological tissues. In this way, is possible to obtain arbitrary frequency dependent attenuation and dispersion in order to model complex heterogeneous media. Furthermore, due to the generalized formulation, typical processes can be modeled as the molecular relaxation observed in air and in sea water.

RESUMEN

En este trabajo se presenta un modelo para la propagación de ondas acústicas en régimen no lineal, incluyendo procesos de relajación, así como la solución numérica del mismo mediante diferencias finitas. A diferencia de otros trabajos, el método propuesto evita el uso de operadores de convolución. Así, mediante la optimización de los parámetros asociados a dos procesos de relajación es posible modelar las pérdidas y la dispersión observadas experimentalmente en la mayoría de tejidos biológicos. De esta manera, no sólo es posible modelar la atenuación como una potencia arbitraria de la frecuencia, sino también ajustar la atenuación a una curva arbitraria describiendo medios heterogéneos complejos. Además, con la formulación general propuesta, es posible modelar otras situaciones de gran interés como los procesos de relajación de las moléculas de aire o del agua salada.

1 INTRODUCCIÓN

Las medidas experimentales de atenuación acústica en tejidos biológicos revelan la existencia de una dependencia de las pérdidas en función de la frecuencia que en la mayoría de los casos se puede modelar con una ley de potencia [1], $\alpha(f) = \alpha_0 f^{\gamma}$, donde el exponente γ toma valores entre 0.8 y 2. Por otro lado, para describir la propagación no lineal de ondas acústicas en estos medios se requiere la inclusión de dichas pérdidas ya que, aun para una excitación inicial sinusoidal, cada armónico de los generados durante la propagación experimentará una atenuación distinta. Desafortunadamente, la modelización en dominio temporal de dichas pérdidas requiere de complejos operadores que, en muchos de los casos, han de resolverse mediante operadores de convolución, lo que conlleva un prohibitivo empleo de los recursos computacionales cuando se pretende una solución numérica del modelo. Otra opción bastante extendida para modelizar la atenuación en dominio temporal es la introducción de operadores diferenciales fraccionales, ya sean en dominio espacial, temporal o una combinación de ambos. Estos operadores muestran una atenuación que sigue una ley de potencia con la frecuencia, por lo que son muy utilizados para modelar la atenuación en tejidos

biológicos. Sin embargo, el empleo de estos operadores queda reducido a la modelización de una única ley de potencias, por lo que no son capaces de modelar la atenuación, y por ende, la dispersión observada en medios complejos en los que existen variaciones locales de γ.

En este trabajo se presenta un modelo para la propagación de ondas acústicas en régimen no lineal con la inclusión de procesos de relajación mediante una formulación generalizada. Mediante la inclusión de un par de procesos de relajación es posible modelar las pérdidas, así como la dispersión, observadas experimentalmente en la mayoría de tejidos biológicos. De esta manera, no sólo es posible modelar una única ley de potencia, sino también ajustar la atenuación a una curva arbitraria, lo que presenta una ventaja respecto de los modelos de pérdidas basados en derivadas parciales fraccionales a la hora de modelar tejidos heterogéneos complejos. Además, puesto que se presenta una formulación de la relajación generalizada, es posible modelar las pérdidas y dispersión de otros medios como es el caso de los típicos procesos de relajación de las moléculas de aire o del agua salada.

2 MODELIZACIÓN

Los principios de conservación de masa y momento nos proporcionan las expresiones constitutivas de la acústica no lineal, que para un fluido podemos expresar como [2]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \ , \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) \ , \tag{2}$$

donde ρ es la densidad total, $\mathbf{v}$ es la velocidad de partícula, p es la presión acústica y η y ζ los coeficientes de viscosidad transversal y volumétrica respectivamente. Por otro lado, la existencia de relajación en un medio acústico conlleva la existencia de una diferencia de fase entre las variaciones de presión y la densidad. Este desfase se puede expresar formalmente sobre la ecuación de estado del fluido la que, conservando los términos no lineales hasta orden 2, podemos expresar como [2]

$$p = c_0^2\rho' + \frac{c_0^2}{\rho_0}\frac{B}{2A}\rho'^2 - \int_{-\infty}^{t} G(t-t')\rho' dt \ , \tag{3}$$

donde $\rho' = \rho - \rho_0$ son las variaciones de densidad respecto del valor de equilibrio ρ_0, c_0 es la velocidad del sonido, B/A es el parámetro de no linealidad del medio y $G(t)$ es el núcleo que describe la relajación. Así, si tenemos en cuenta N procesos de relajación con decaimiento exponencial

$$G(t) * \rho' = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\eta_n c_0^2}{\tau_n} e^{-t/\tau_n} H(t)\right) * \rho' \ , \tag{4}$$

donde $H(t)$ es la función escalón unitario, τ_n es el tiempo característico de relajación para el proceso de orden n, η_n el módulo de relajación definido cómo $\eta_n = (c_0^2\text{-}c_n^2) / c_n^2$ siendo c_n la velocidad del sonido en el límite de alta frecuencia. Como podemos observar, la modelización de los procesos de relajación conlleva la inclusión de un operador de convolución. Este operador es altamente costoso a la hora de implementarlo computacionalmente en un método numérico en dominio temporal, pues requiere del almacenamiento en memoria de todos los instantes iniciales. Para evitarlo definiremos la variable de estado para cada proceso de relajación S_n como

$$S_n = \left(\frac{\eta_n c_0^2}{\tau_n} e^{-t/\tau_n} H(t) \right) * \rho' \ . \tag{5}$$

Así, empleando las propiedades de la convolución, la derivada temporal de la variable de estado se puede expresar para cada proceso como

$$\frac{\partial S_n}{\partial t} = \left(-\frac{1}{\tau_n} \frac{\eta_n c_0^2}{\tau_n} e^{-t/\tau_n} H(t) + \frac{\eta_n c_0^2}{\tau_n} \right) * \rho' \ , \tag{6}$$

que, empleando la propia definición de S_n, nos proporciona la evolución de esta variable en forma de una ecuación diferencial ordinaria (ODE)

$$\frac{\partial S_n}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_n} S_n + \frac{\eta_n c_0^2}{\tau_n} \rho' \ . \tag{7}$$

Finalmente, podemos reescribir la ecuación de estado en esta formulación incluyendo N procesos de manera que

$$p = c_0^2 \rho' + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{B}{2A} \rho'^2 - \sum_{n=1}^{N} S_n \ . \tag{8}$$

Las ecuaciones (1-2, 7-8) se resuelven numéricamente mediante técnicas FDTD (*Finite Differences in Time Domain method*). Se ha desarrollado el modelo bajo un sistema de coordenadas cilíndricas axisimétricas para después aplicar diferencias finitas centradas sobre los operadores diferenciales, obteniendo de esta manera un esquema numérico explícito para las variables ρ, p y $\mathbf{v}$.

3 RESULTADOS

3.1 ATENUACIÓN Y DISPERSIÓN POR UN ÚNICO PROCESO DE RELAJACIÓN

La atenuación teórica obtenida para N procesos de relajación viene dada por [3]

$$\alpha = \sum_{n=1}^{N} \frac{\eta_n}{2 c_0 \tau_n} \frac{\omega^2 \tau_n^2}{1 + \omega^2 \tau_n^2} \ , \tag{9}$$

y la dispersión por

$$c = c_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\eta_n}{2} \frac{\omega^2 \tau_n^2}{1 + \omega^2 \tau_n^2} \right) . \tag{10}$$

Para la validación del método se ha implementado en primer lugar un único proceso de relajación. De esta manera, se ha considerado una onda plana propagándose a lo largo de la dirección $+z$ en un medio homogéneo donde $c_0 = 1500$ m/s, $\rho_0 = 1000$ kg/m^3, $B/A = 5$, $\eta = 8{,}90 \cdot 10^{-4}$ Pa·s. La frecuencia central de la señal de banda ancha es $f_0 = 10$ MHz y los parámetros del método numéricos son $\Delta r = \Delta z = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ m, $\Delta t = 1{,}14 \cdot 10^{-9}$ s. Los parámetros de relajación fueron $\tau_n = 1/2\pi f_0$ y el módulo $\eta_n = 0{,}0412$. Los resultados de la caracterización analítica y la numérica se muestran en la Figura 1.

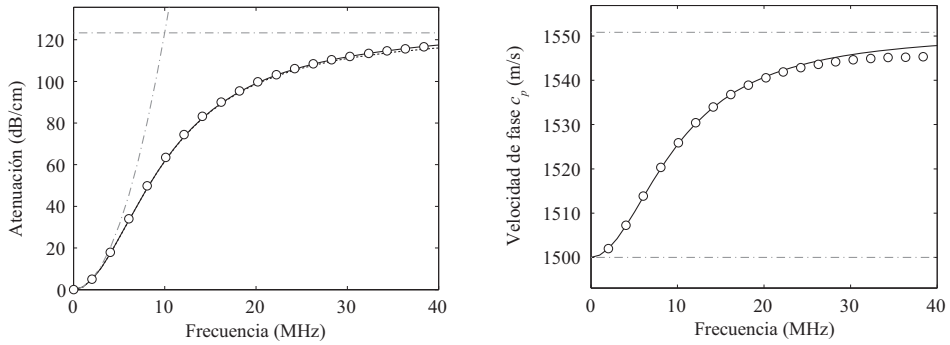


Figura 1. Atenuación y dispersión observadas para un proceso de relajación simple en agua. Analítico (línea continua) y numérico (círculos). Las líneas punteadas marcan los límites de baja y alta frecuencia para la atenuación ($\alpha=\eta_n\tau_n\omega^2 / 2c_0$ *y* $\alpha=\eta_n / 2c_0\tau_n$) *y para la dispersión* (c_0 *y* c_n).

3.2 RELAJACIÓN EN AIRE

La atenuación en aire está debida principalmente a los procesos de relajación de las moléculas que lo componen, principalmente oxígeno y nitrógeno. Los procesos termo-viscosos, dominantes a altas frecuencias, se modelan con un coeficiente de difusión b = 4.86·10^{-5} Pa·s. Los parámetros de relajación asociados a dichas moléculas son $\eta[O_2]$ = 0.11 m/s, $\tau[O_2]$ = 6.0 µs, $\eta[N_2]$ = 0.023 m/s, $\tau[N_2]$ = 531 µs, todos escogidos para una humedad relativa del 34%, temperatura de 293K y una presión ambiente de 1 atm [4-5]. Así, con el método propuesto se pueden modelar las pérdidas y dispersión numéricamente como se muestra en la Figura 2.

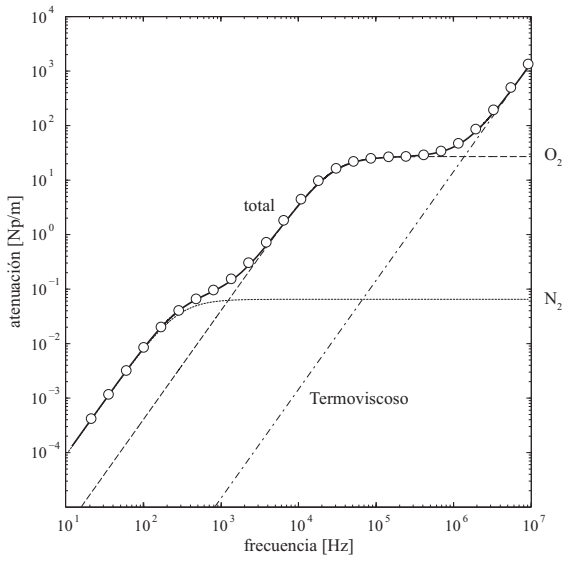


Figura 2. Atenuación en aire modelada numéricamente (círculos) y teórica (línea continua) debida a mecanismos termo-viscosos (línea discontinua-punteada) y de relajación de las moléculas de oxígeno (línea discontinua) y de nitrógeno (línea punteada).

3.3 RELAJACIÓN EN AGUA DE MAR

En el caso del agua de mar, la atenuación es debida, además de a la propia viscosidad del agua, a los procesos de relajación asociados a las moléculas de sulfato de magnesio ($MgSO_4$) y de ácido bórico $B(OH)_3$. Los parámetros de relajación con los que se modela la atenuación dependen principalmente de la presión ambiental, la temperatura, la salinidad y el pH del agua de mar. Las frecuencias típicas de relajación están en torno a 1kHz para el sulfato de magnesio y 100kHz para el caso del ácido bórico. La Figura 3 muestra la atenuación obtenida experimentalmente a presión = 1 atm, temperatura = 4ºC, salinidad = 35% y pH = 8.0 [6] y la modelada numéricamente mediante el método propuesto.

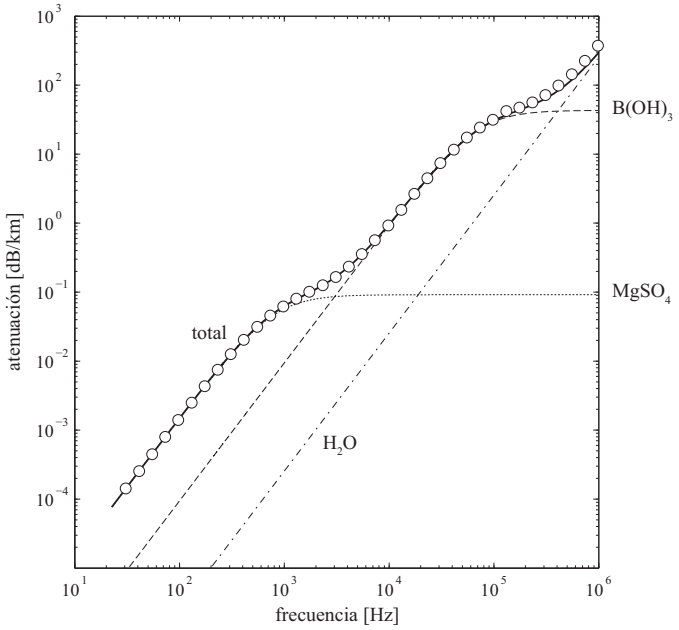


Figura 3. Atenuación en agua de mar modelada numéricamente (círculos) y experimental (línea continua) debida a mecanismos termo-viscosos del agua (línea discontinua-punteada) y de relajación de las moléculas de ácido bórico (línea discontinua) y de sulfato de magnesio (línea punteada).

3.4 TEJIDOS BIOLÓGICOS

Para el modelado de la atenuación observada en tejidos biológicos se ha realizado la optimización de los coeficientes relativos a dos procesos de relajación. De esta manera se pueden caracterizar las curvas de atenuación observadas experimentalmente en tejidos. En la Figura 4 se muestran los resultados de atenuación obtenidos experimentalmente para una serie de tejidos blandos [1], así como algunos fluidos y para las ondas longitudinales en el cráneo. Podemos observar cómo la respuesta de estos tejidos sigue en mayor o menor grado una ley de potencia con la frecuencia (marcada en números pequeños sobre las curvas). Sin embargo, esta ley de potencia en muchos casos no es constante, sobre todo en el rango de frecuencias medido. Con el método propuesto se puede modelizar la absorción de una ley de potencia constante (como en el caso de la atenuación en el tendón, piel, hígado o cerebro), además de atenuaciones que siguen una dependencia con la frecuencia arbitraria (como en el caso de los tejidos del cráneo, mama o la atenuación acústica observada en la sangre).

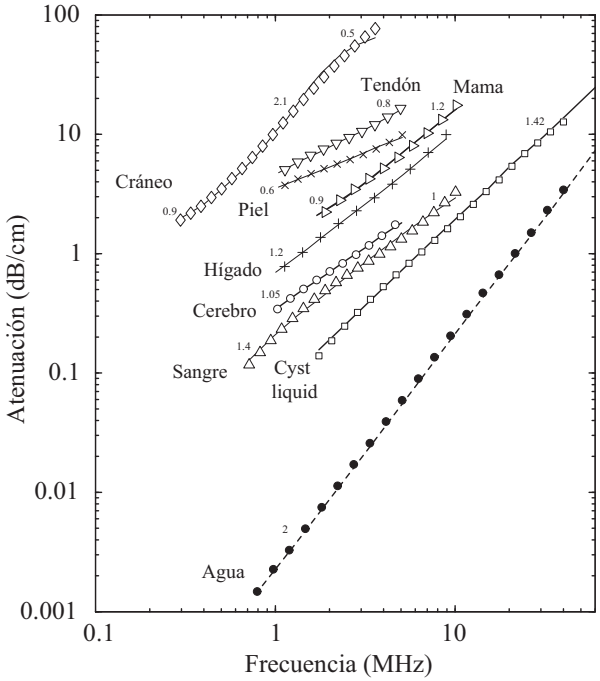


Figura 4. Atenuación obtenida para distintos tejidos biológicos optimizando los coeficientes relativos a dos procesos de relajación. Numérico (marcadores), experimental (línea continua). Los números sobre las curvas indican la ley de potencia ajustada sobre ese rango de frecuencia.

4 CONCUSIONES

En este trabajo ha propuesto e implementado un novedoso método generalizado para la modelización de ondas acústicas en régimen no lineal incluyendo múltiples procesos de relajación. De esta manera, y mediante la elección de los parámetros de relajación adecuados, es posible modelizar la atenuación y dispersión de las ondas de amplitud finita en un fluido. Concretamente en este trabajo se presentan resultados de atenuación y dispersión debidos a los procesos de relajación de las moléculas de oxígeno y nitrógeno en aire, para los procesos de relajación existentes en agua marina y para la modelización de la atenuación en medios complejos y heterogéneos como son los tejidos biológicos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado gracias una beca FPI del programa PAID-2011 y el programa PAID-05-12:SP20120696 de la Universidad Politécnica de Valencia, y al Ministerio de Ciencia e Innovación y la Unión Europea FEDER por medio del proyecto FIS2011-29731-C02-02.

REFERENCIAS

[1] C.R. Hill, J.C. Bamber, G.R. Haar. Physical Principles of Medical Ultrasonics. John Wiley & Sons, 2004
[2] K. Naugolnykh, L. Ostrovsky. Nonlinear Wave Processes in Acoustics. Cambridge University Press, 1998
[3] O. V. Rudenko, S. I. Soluyan. Theoretical foundations of nonlinear acoustics. Plenum, New York, 1977
[4] P. V. Yuldashev, M. V. Averiyanov, V. A. Khokhlova, S. Ollivier, Ph. Blanc-Benon. “Nonlinear Spherically Divergent Shock Waves Propagating in a Relaxing Medium”. Acoustical Physics. 54(1), 32-41, 2008
[5] M. S. Wochner, A. A. Atchley, and V. W. Sparrow. Numerical simulation of finite amplitude wave propagation in air using a realistic atmospheric absorption model. J. Acoust. Soc. Am. 118(5), 2891-2898, 2005
[6] F. H. Fisher, V. P. Simmons. “Sound absorption in sea water”. J. Acoust. Soc. Am. 62(3), 558-564, 1977