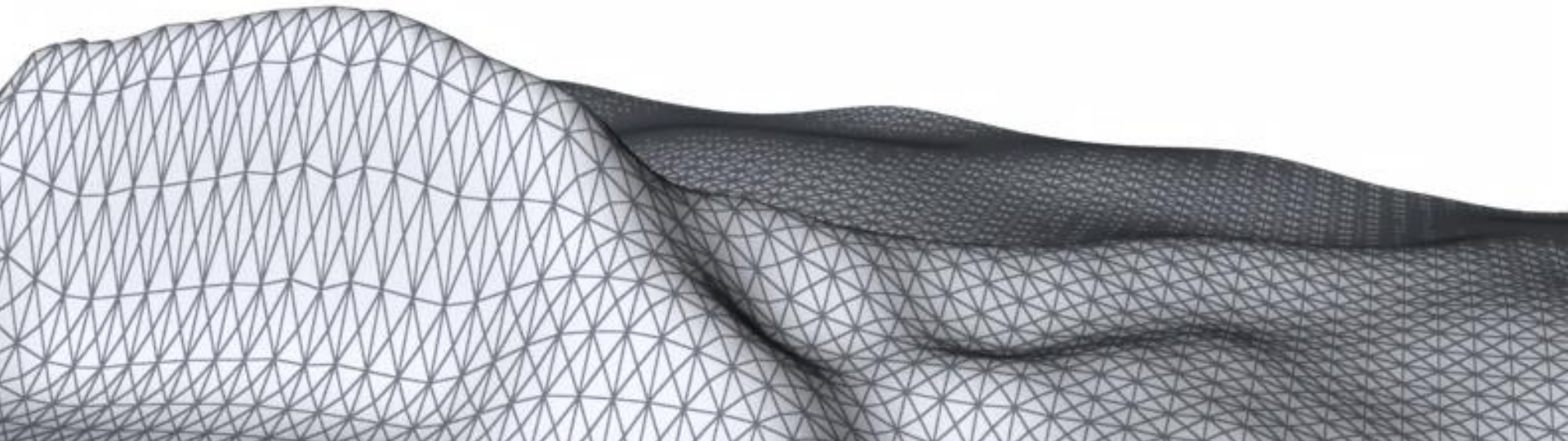
TECNIACUSTICA León · 2010

# CÁLCULO DE CAMPOS ACÚSTICOS NO LINEALES MEDIANTE DIFERENCIAS FINITAS EN DOMINIO TEMPORAL

Noé Jiménez, Javier Redondo, Bernardino Roig, Francisco Camarena, Rubén Picó, Silvia Adrian, Víctor Sánchez-Morcillo.

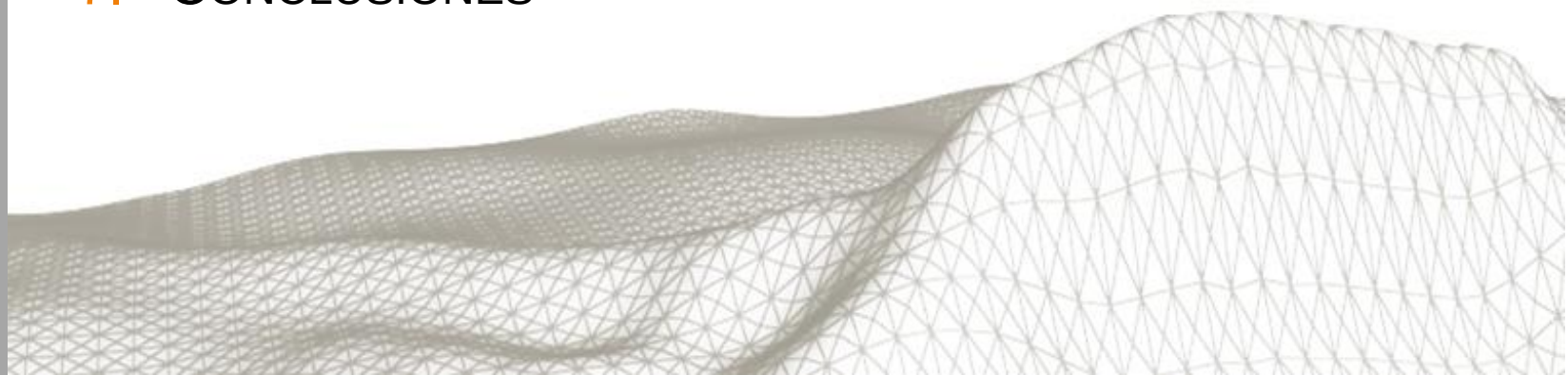


# ÍNDICE


- Introducción
- Modelo para Fluidos Termoviscosos
- Discretización Conservativa mediante FDTD
- Estabilidad
- ABC's
- Validación y Resultados
- Conclusiones



1. Introducción
2. Modelo Físico de Propagación para Fluidos con Pérdidas Termoviscosas
3. Discretización Conservativa mediante FDTD
4. Estabilidad Lineal y No Lineal
5. Implementación de ABC's para el dominio No Lineal
6. Validación y Resultados para Haces Focalizados y Resonadores no lineales
7. Conclusiones

# 1. INTRODUCCIÓN


- INTRODUCCIÓN
- MODELO PARA FLUIDOS TERMOVISCOSOS
- DISCRETIZACIÓN CONSERVATIVA MEDIANTE FDTD
- ESTABILIDAD
- ABC's
- VALIDACIÓN Y RESULTADOS
- CONCLUSIONES


- OBJETIVOS:
  1. Obtener un método para predecir campos acústicos en régimen no lineal
  2. Explicar y comprender fenómenos inherentes a la propagación de haces focalizados en fluidos termoviscosos
- METODOLOGÍA
  - Simulación numérica en dominio temporal
  - Sistema de ecuaciones constitutivas



# 2. Modelo Físico de Propagación para Fluidos con Pérdidas Termoviscosas


- Introducción
- Modelo para Fluidos Termoviscosos
- Discretización Conservativa mediante FDTD
- Estabilidad
- ABC's
- Validación y Resultados
- Conclusiones


- Modelo basado en leyes conservativas
  1. Conservación de masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

  2. Conservación de momento con pérdidas viscosas

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right) + \nabla p - \eta \nabla^2 \mathbf{v} - \left(\eta_B + \frac{1}{3}\eta\right)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$$

  3. Estado termodinámico del fluido, pérdidas por transferencia de calor
     A. Gases

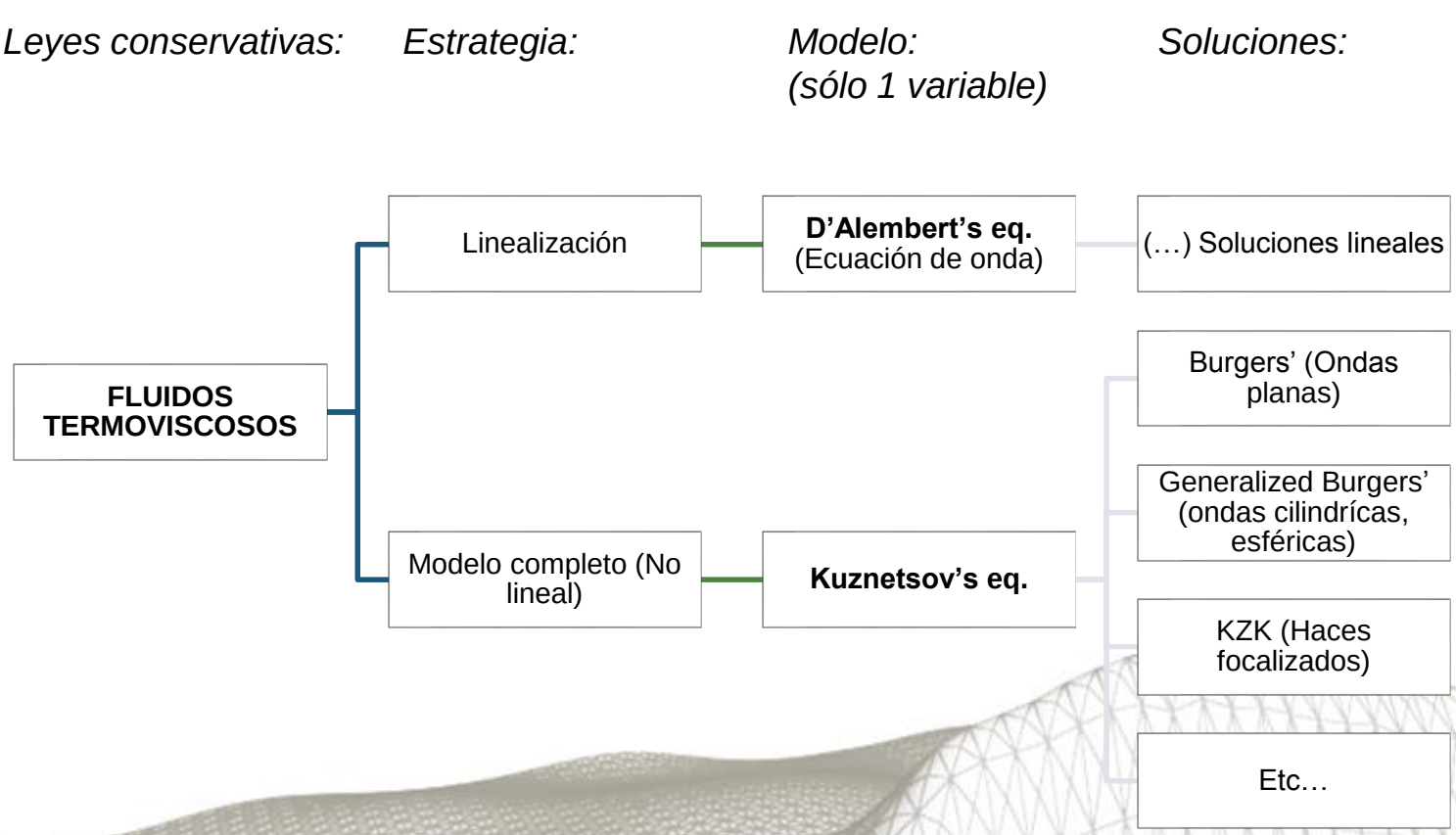
$$p' = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} - p_0 - \kappa\left(\frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_p}\right)\nabla \cdot \mathbf{v}$$

     B. Líquidos

$$p' = c_0^2 \rho' + \frac{c_0^2}{\rho_0}\frac{B}{2A}\rho'^2 - \kappa\left(\frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_p}\right)\nabla \cdot \mathbf{v}$$

# 2. Modelo Físico de Propagación para Fluidos con Pérdidas Termoviscosas


- Introducción
- Modelo para Fluidos Termoviscosos
- Discretización Conservativa mediante FDTD
- Estabilidad
- ABC's
- Validación y Resultados
- Conclusiones

# 3. Discretización Conservativa mediante FDTD


- Introducción
- Modelo para Fluidos Termoviscosos
- Discretización Conservativa mediante FDTD
- Estabilidad
- ABC's
- Validación y Resultados
- Conclusiones


1. Sistema de coordenadas: cartesianas 2D

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$$

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho\left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial p}{\partial y} - \eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} - \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0$$

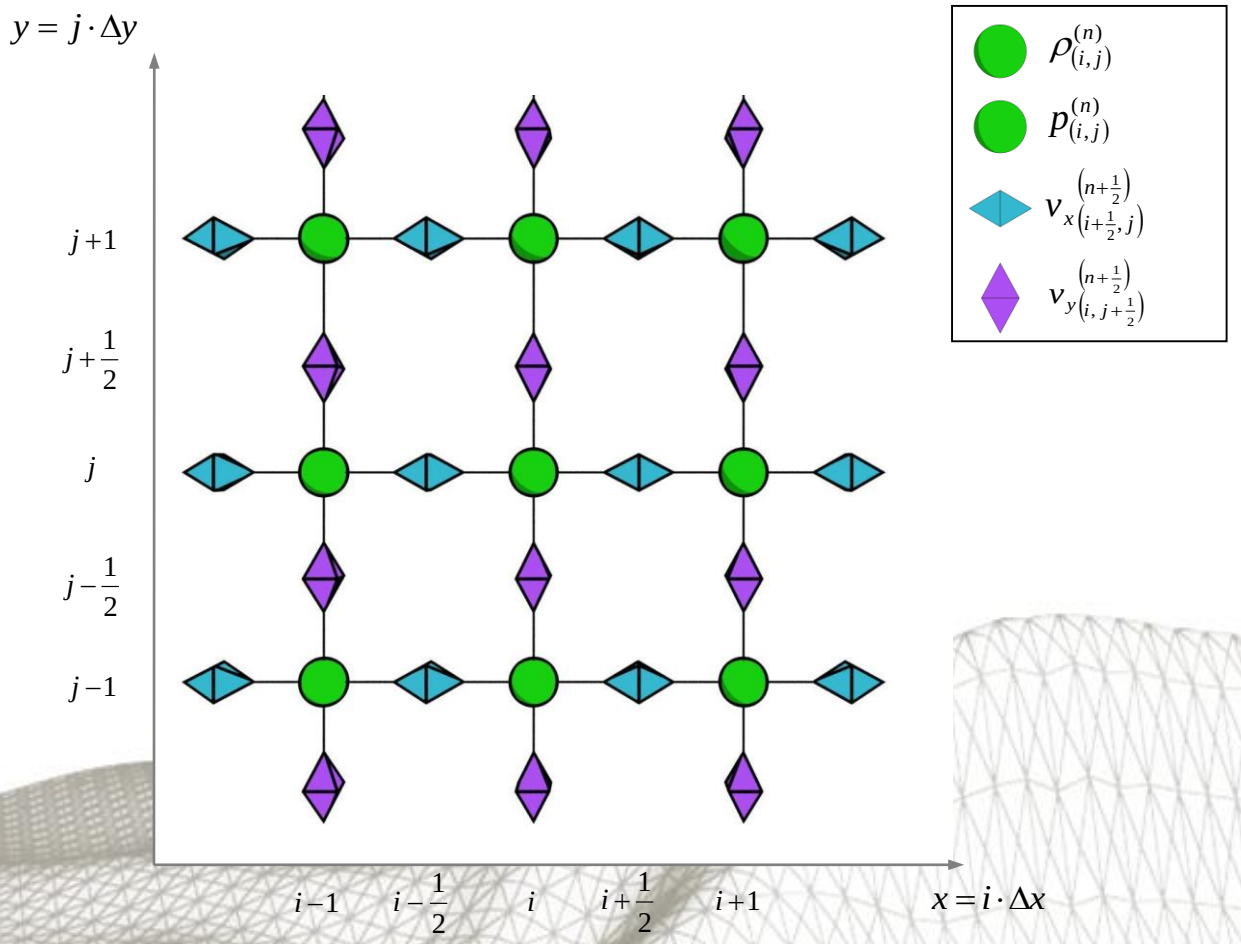
$$p' = c_0^2 \rho' + \frac{c_0^2}{\rho_0}\frac{B}{2A}\rho'^2 - \kappa\left(\frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_p}\right)\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right)$$

2. Método FDTD:
   - Discretización de los campos
   - Aproximación de las derivadas parciales mediante diferencias finitas centradas

# 3. Discretización Conservativa mediante FDTD


- Introducción
- Modelo para Fluidos Termoviscosos
- Discretización Conservativa mediante FDTD
- Estabilidad
- ABC's
- Validación y Resultados
- Conclusiones

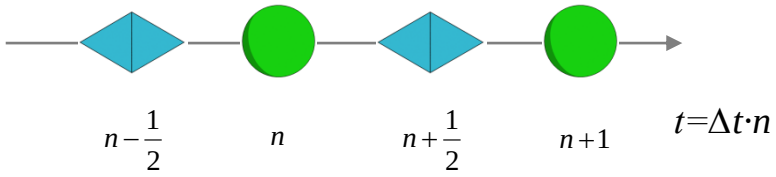

- Discretización Espacial de los campos

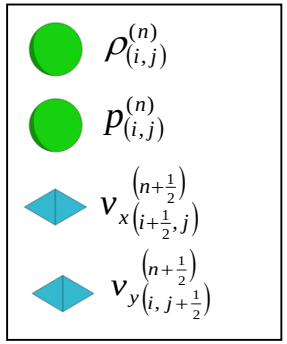


# 3. Discretización Conservativa mediante FDTD


- Introducción
- Modelo para Fluidos Termoviscosos
- Discretización Conservativa mediante FDTD
- Estabilidad
- ABC's
- Validación y Resultados
- Conclusiones


- Discretización Temporal de los campos



# 3. Discretización Conservativa mediante FDTD


- Introducción
- Modelo para Fluidos Termoviscosos
- Discretización Conservativa mediante FDTD
- Estabilidad
- ABC's
- Validación y Resultados
- Conclusiones


- Aproximación de las derivadas parciales mediante diferencias finitas centradas
  - Discretización conservativa:
    - *Los principios de conservación se han de cumplir para cada elemento discreto*
  - FDTD (2,2): 2º orden en tiempo y espacio
  - *Ecuación de continuidad:*
    - Evaluar en $t=n+1/2, x=i, y=j$
  - *Ecuación de estado:*
    - Evaluar en $t=n+1/2, x=i, y=j$
  - *Ecuación de movimiento, componente x:*
    - Evaluar en $t=n, x=i+1/2, y=j$
  - *Ecuación de movimiento, componente y:*
    - Evaluar en $t=n, x=i, y=j+1/2$

# 3. Discretización Conservativa mediante FDTD


- Introducción
- Modelo para Fluidos Termoviscosos
- Discretización Conservativa mediante FDTD
- Estabilidad
- ABC's
- Validación y Resultados
- Conclusiones


- Aproximación de las derivadas parciales mediante diferencias finitas centradas
  - Ejemplo: Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$$

Evaluar en $t=n+1/2$, $x=i$, $y=j$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \cong \frac{\rho_{(i,j)}^{(n+1)} - \rho_{(i,j)}^{(n)}}{\Delta t}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) \cong \left(\rho_0 + \frac{\rho_{(i,j)}^{(n+1)} + \rho_{(i,j)}^{(n)}}{2}\right)\left(\frac{v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} - v_{x\left(i-\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{\Delta h} + \frac{v_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} - v_{y\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{\Delta h}\right)$$

$$v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} \cong \frac{v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} + v_{x\left(i-\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2}\left(\frac{\frac{\rho_{(i,j)}^{(n)} + \rho_{(i,j)}^{(n+1)}}{2} + \frac{\rho_{(i+1,j)}^{(n)} + \rho_{(i+1,j)}^{(n+1)}}{2} - \frac{\rho_{(i-1,j)}^{(n)} + \rho_{(i-1,j)}^{(n+1)}}{2} + \frac{\rho_{(i,j)}^{(n)} + \rho_{(i,j)}^{(n+1)}}{2}}{\Delta h}\right)$$

# 3. Discretización Conservativa mediante FDTD


- Introducción
- Modelo para Fluidos Termoviscosos
- Discretización Conservativa mediante FDTD
- Estabilidad
- ABC's
- Validación y Resultados
- Conclusiones


- Aproximación de las derivadas parciales mediante diferencias finitas centradas
  - Sistema semi-implícito

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \cong \frac{\rho_{(i,j)}^{(n+1)} - \rho_{(i,j)}^{(n)}}{\Delta t} \qquad \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) \cong \left(\rho_0 + \frac{\rho_{(i,j)}^{(n+1)} + \rho_{(i,j)}^{(n)}}{2}\right)\left(\frac{v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} - v_{x\left(i-\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{\Delta h} + \frac{v_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} - v_{y\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{\Delta h}\right)$$

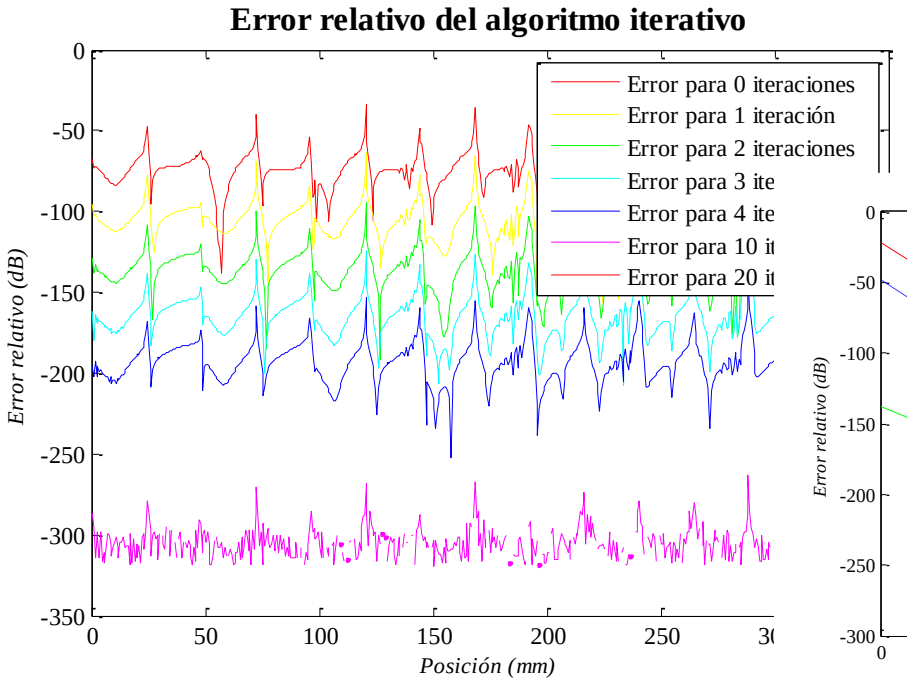
$$v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} \cong \frac{v_{x\left(i+\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} + v_{x\left(i-\frac{1}{2},j\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2} \left( \frac{\frac{\frac{\rho_{(i,j)}^{(n)} + \rho_{(i,j)}^{(n+1)}}{2} + \frac{\rho_{(i+1,j)}^{(n)} + \rho_{(i+1,j)}^{(n+1)}}{2}}{2} - \frac{\frac{\rho_{(i-1,j)}^{(n)} + \rho_{(i-1,j)}^{(n+1)}}{2} + \frac{\rho_{(i,j)}^{(n)} + \rho_{(i,j)}^{(n+1)}}{2}}{2}}{\Delta h} \right)$$

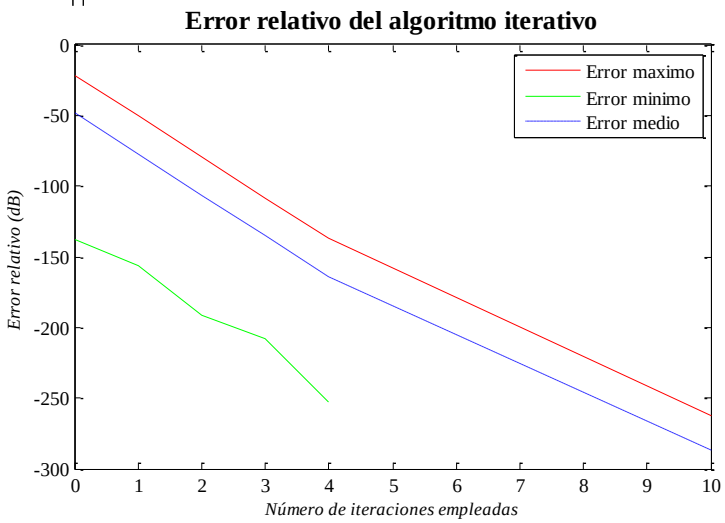
$$v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} \cong \frac{v_{y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} + v_{y\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2} \left( \frac{\frac{\frac{\rho_{(i,j)}^{(n)} + \rho_{(i,j)}^{(n+1)}}{2} + \frac{\rho_{(i,j+1)}^{(n)} + \rho_{(i,j+1)}^{(n+1)}}{2}}{2} - \frac{\frac{\rho_{(i,j-1)}^{(n)} + \rho_{(i,j-1)}^{(n+1)}}{2} + \frac{\rho_{(i,j)}^{(n)} + \rho_{(i,j)}^{(n+1)}}{2}}{2}}{\Delta h} \right)$$

# 3. Discretización Conservativa mediante FDTD


- Introducción
- Modelo para Fluidos Termoviscosos
- Discretización Conservativa mediante FDTD
- Estabilidad
- ABC's
- Validación y Resultados
- Conclusiones


- Sistema Semi-implícito
  - Solución: Método iterativo
  - El valor inicial para las incógnitas lo obtenemos mediante la solución lineal.
  - Tras unas pocas iteraciones el algoritmo converge a la solución no-lineal



# 4. Estabilidad Lineal y No Lineal


- Introducción
- Modelo para Fluidos Termoviscosos
- Discretización Conservativa mediante FDTD
- Estabilidad
- ABC's
- Validación y Resultados
- Conclusiones


- Lineal: Condición CFL:

$$S = c_0 \frac{\Delta t}{\Delta h \sqrt{D}} \leq 1$$

- Estabilidad No-lineal:
  - Generación progresiva de armónicos → Aliasing espacial
  - Formación de shocks por efecto acumulativo
    - Limitar mediante viscosidad artificial (≈FPB)

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right) + \nabla p - (\eta + \eta_A)\nabla^2 \mathbf{v} - \left(\eta_B + \frac{1}{3}\eta\right)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$$

$$\eta_A \propto \Delta h^2 \qquad \Delta h \longrightarrow 0, \qquad consistente + estable$$

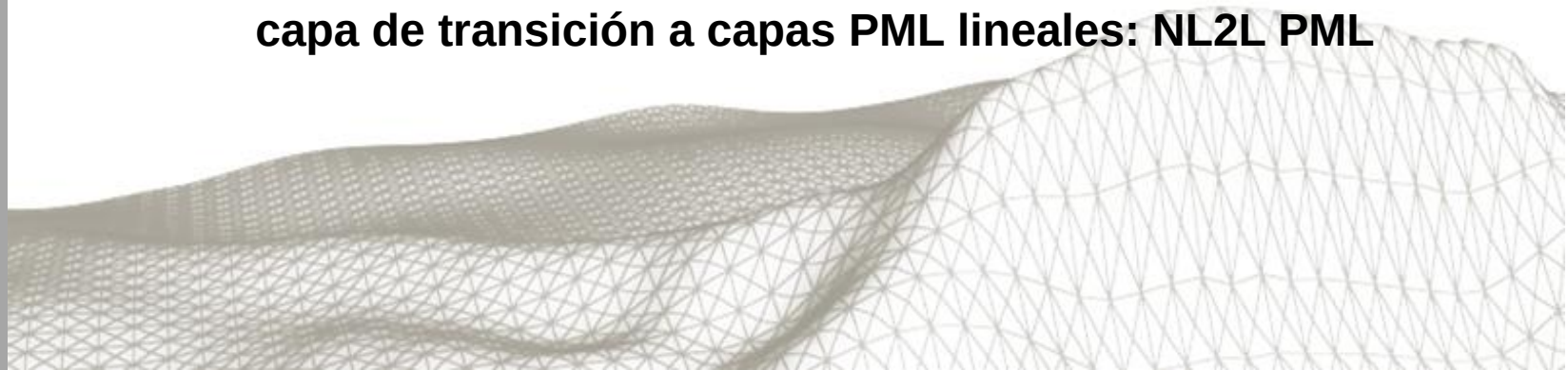
  - Formación de shocks por muy alta intensidad
    - Viscosidad + témino de alto orden

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} - \alpha \nabla\left(\log\left((\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + 1\right)\right)|\nabla \cdot \mathbf{v}|\nabla \cdot \mathbf{v}$$

# 5. Implementación de ABC's para el dominio No Lineal


- Introducción
- Modelo para Fluidos Termoviscosos
- Discretización Conservativa mediante FDTD
- Estabilidad
- ABC's
- Validación y Resultados
- Conclusiones

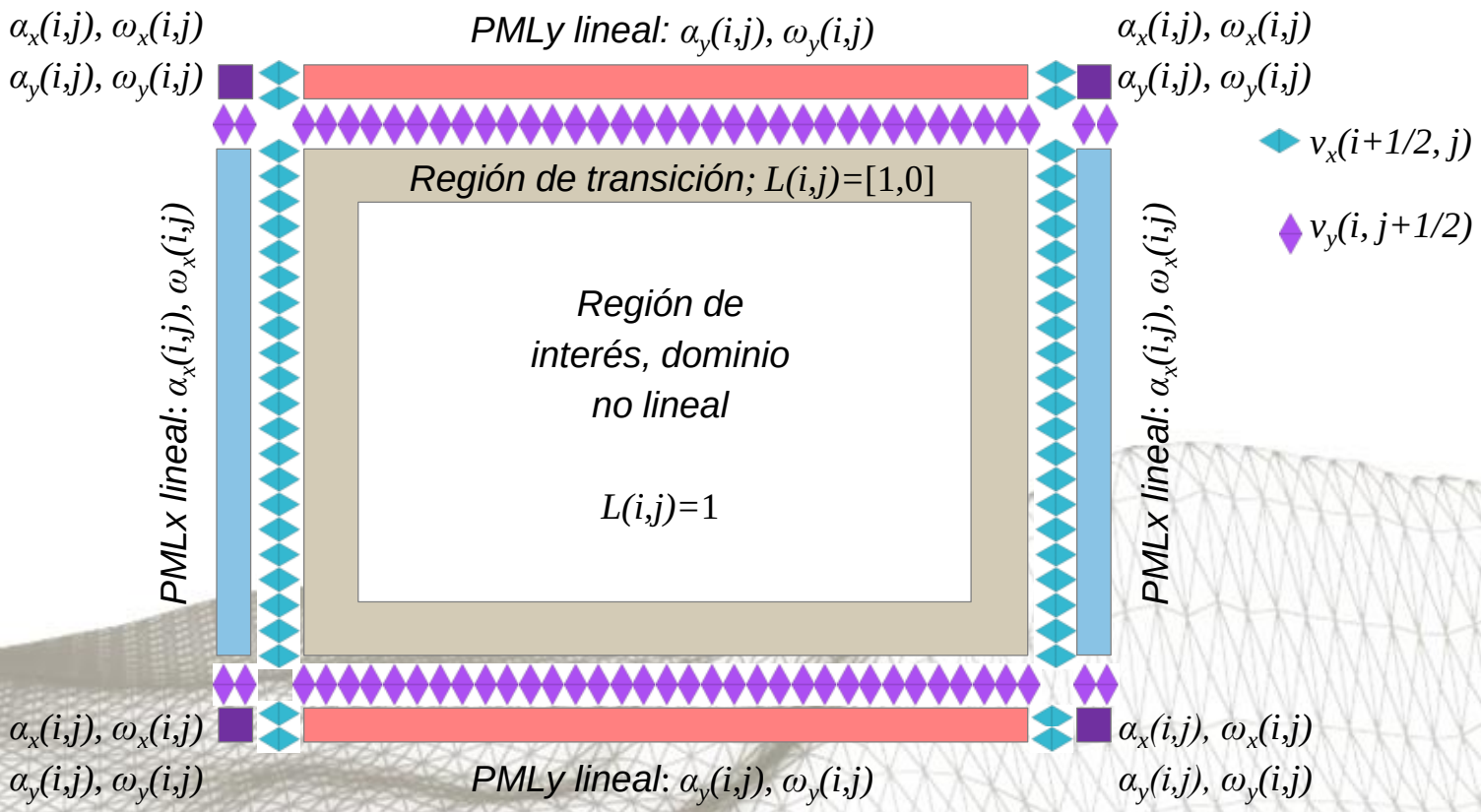

- Condiciones de contorno absorbentes:
  - Acotar el dominio y eliminar reflexiones, optimizar el coste computacional y el tiempo de simulación
  - *Perfect matched Layers* (PML)
  - Formulación *complex coordinate stretching*
    - *Separación de campos en subcomponentes*
    - *Sistema implícito: Alto coste computacional al implementarlas directamente sobre el dominio No-lineal*
  - *Solución:*
    - **Acoplo progresivo del dominio No lineal mediante una capa de transición a capas PML lineales: NL2L PML**



# 5. Implementación de ABC's para el dominio No Lineal


- Introducción
- Modelo para Fluidos Termoviscosos
- Discretización Conservativa mediante FDTD
- Estabilidad
- ABC's
- Validación y Resultados
- Conclusiones


- NL2L PML:
  - $L(i,j)=0$ → anulamos los términos no lineales
  - Región de transición $L(i,j)$ perfil cuadrático



# 5. Implementación de ABC's para el dominio No Lineal


- Introducción
- Modelo para Fluidos Termoviscosos
- Discretización Conservativa mediante FDTD
- Estabilidad
- ABC's
- Validación y Resultados
- Conclusiones


- PML lineales
  - Valores máximos $\alpha(i,j),\omega(i,j)$

$$\alpha_{max} = \frac{1}{2\Delta h}\frac{c_{min}}{f_{max}} \qquad \omega_{max} = k2\pi f_{max} \qquad k = [1,6]$$

  - Separación en subcomponentes

$$p' = p^x + p^y$$

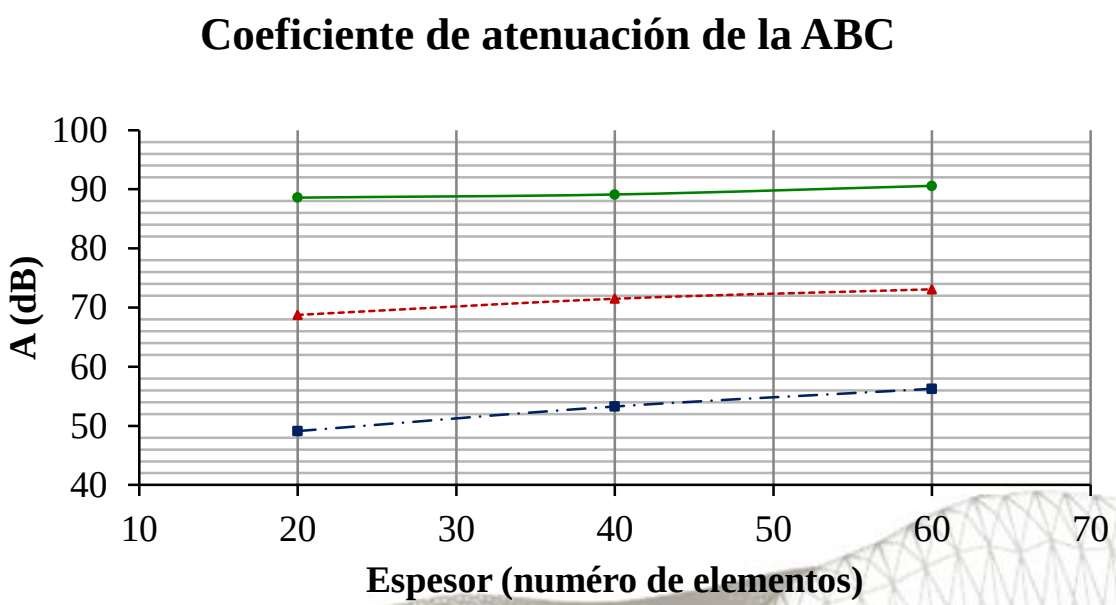
$$\alpha_y \frac{\partial p^y}{\partial t} + \omega_y p^y = -\rho_0 c_0^2 \frac{\partial v_y}{\partial y} \qquad \alpha_x \frac{\partial p^x}{\partial t} + \omega_x p^x = -\rho_0 c_0^2 \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$\alpha_y \frac{\partial v_y}{\partial t} + \omega_y v_y = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad \alpha_x \frac{\partial v_x}{\partial t} + \omega_x v_x = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}$$

# 5. Implementación de ABC's para el dominio No Lineal


- Introducción
- Modelo para Fluidos Termoviscosos
- Discretización Conservativa mediante FDTD
- Estabilidad
- ABC's
- Validación y Resultados
- Conclusiones


- PML No lineal
  - Atenuación depende de la amplitud




- **Verde sólida:** *baja potencia (distancia de shock = 88.8m);*
- **Roja punteada** *potencia media (x shock = 8.8m);*
- **Azul discontinua** *muy alta potencia (x shock = 0.8m)*

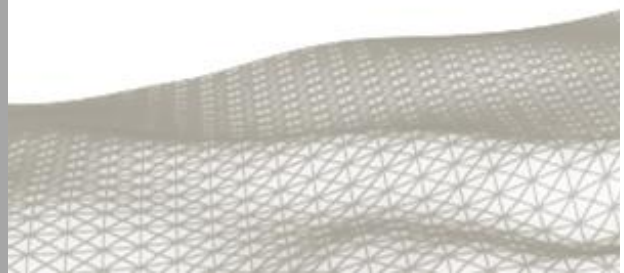
# 6. Validación y Resultados para Haces Focalizados

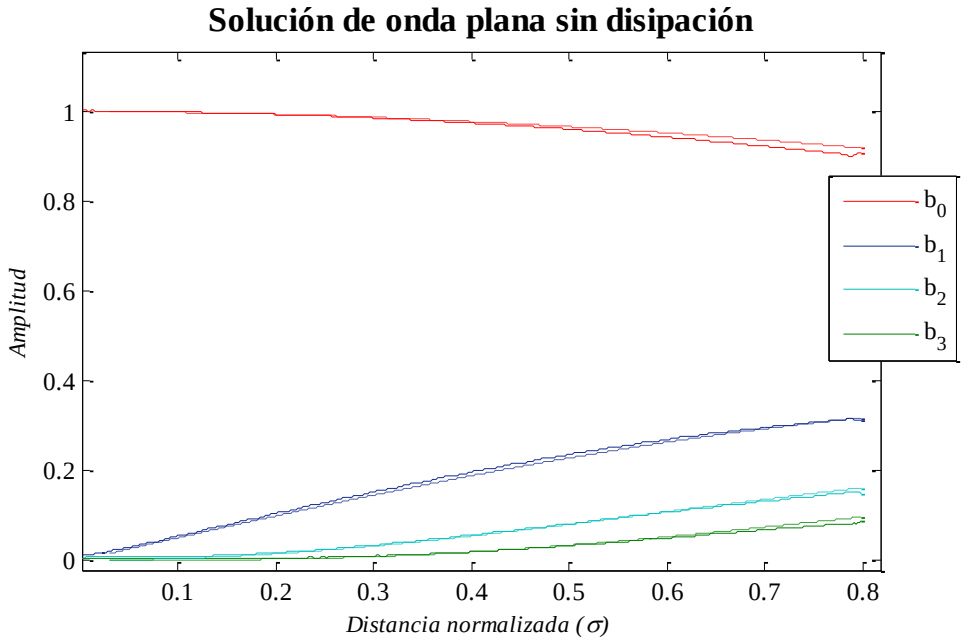

- Introducción
- Modelo para Fluidos Termoviscosos
- Discretización Conservativa mediante FDTD
- Estabilidad
- ABC's
- Validación y Resultados
- Conclusiones


- Lax-Wendroff: Consistencia + Estabilidad
  - Si converge lo hará a una solución débil
  - No garantiza que converja…

- Onda plana sin viscosidad, región de preshock
  - Solución analítica:
    - Bessel fubini

$$a_{max} = a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_n(n\sigma)}{n\sigma} \sin(n\omega\tau)$$

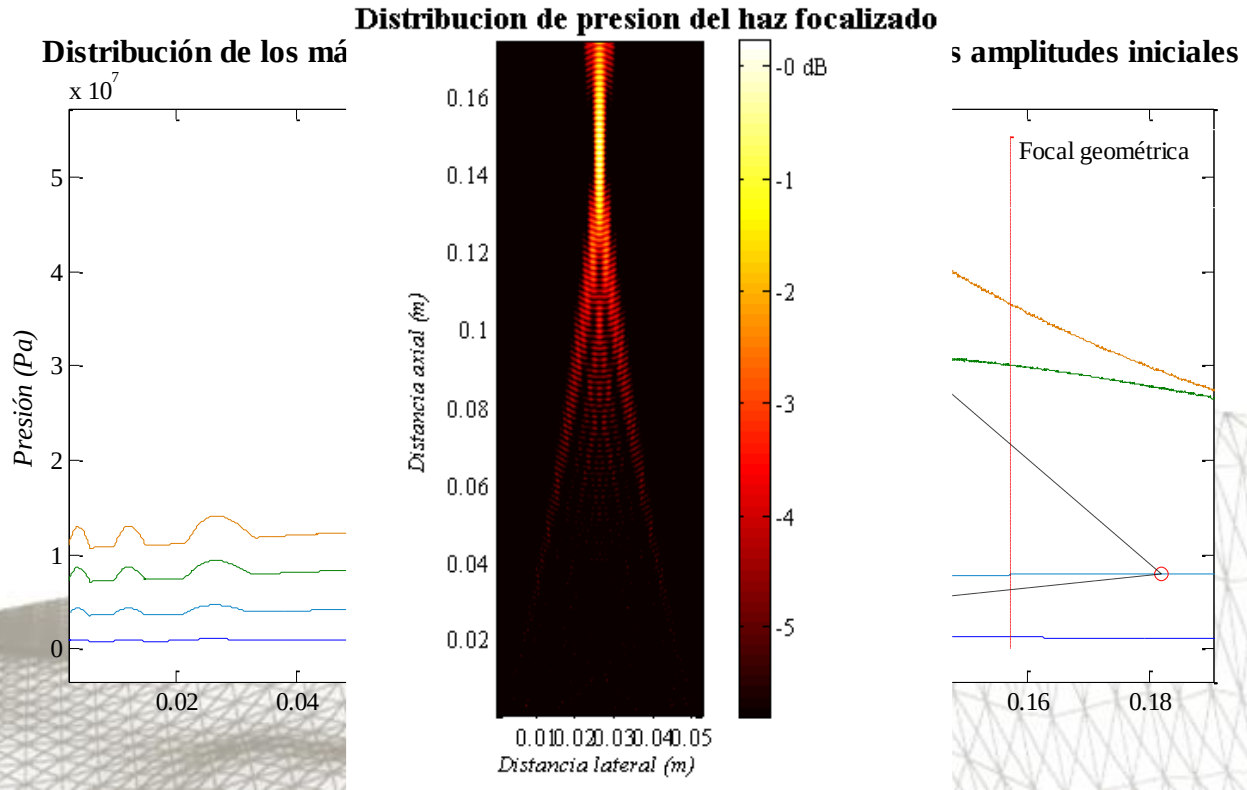




# 6. Validación y Resultados para Haces Focalizados


- Introducción
- Modelo para Fluidos Termoviscosos
- Discretización Conservativa mediante FDTD
- Estabilidad
- ABC's
- Validación y Resultados
- Conclusiones

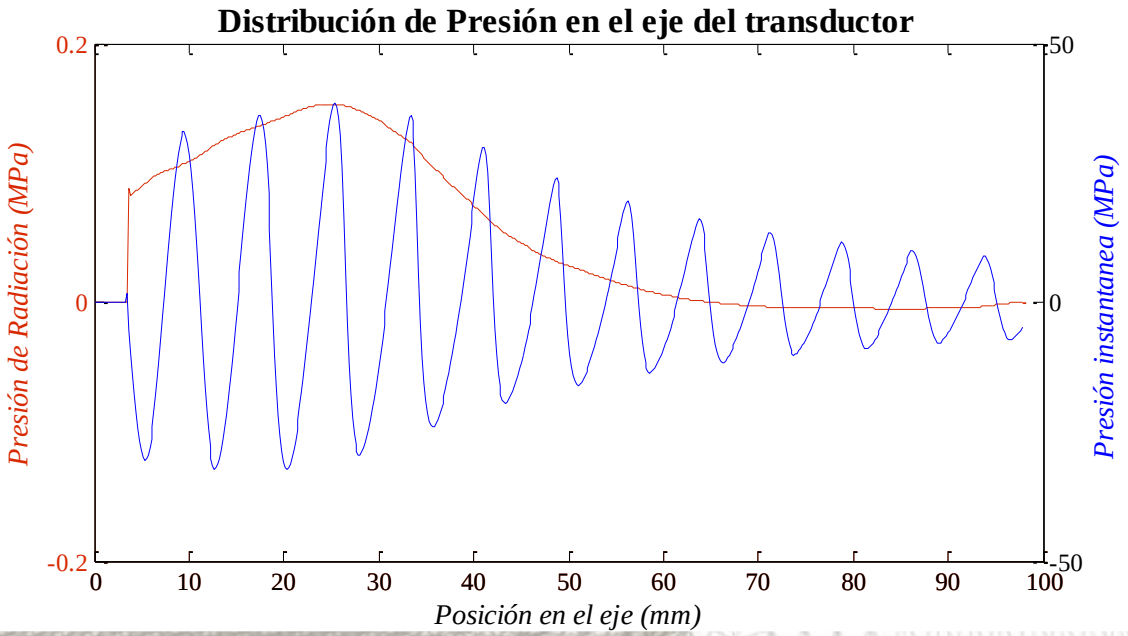

- Transductor focalizado:
  - Apertura=50.2 mm, Focal geométrica=157 mm, $f_0$=222.7 kHz.
  - Lineal: Poca focalización
  - Altas potencia: superamos la focal geométrica



# 6. Validación y Resultados para Haces Focalizados


- Introducción
- Modelo para Fluidos Termoviscosos
- Discretización Conservativa mediante FDTD
- Estabilidad
- ABC's
- Validación y Resultados
- Conclusiones

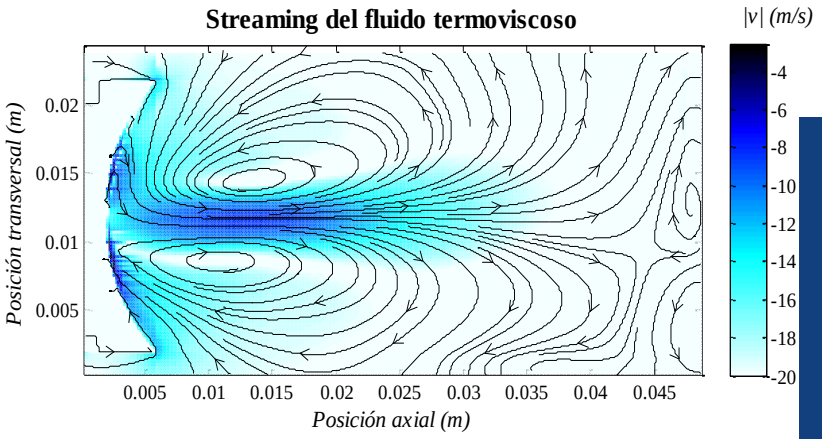

- Obtención de la distribución de la presión de Radiación
  - Calculada como la presión promedio en un periodo

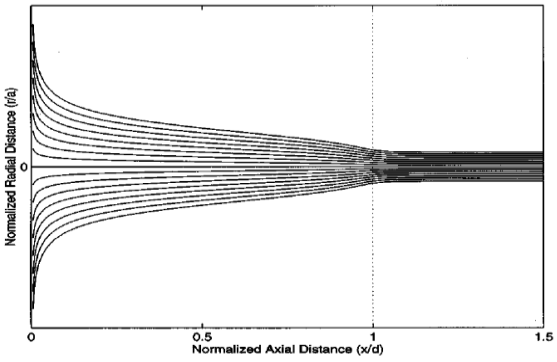


# 6. Validación y Resultados para Haces Focalizados


- Introducción
- Modelo para Fluidos Termoviscosos
- Discretización Conservativa mediante FDTD
- Estabilidad
- ABC's
- Validación y Resultados
- Conclusiones


- Obtención de la distribución de flujo (streaming) generado en un fluido viscoso
  - Calculada como la velocidad promedio en un periodo
  - Sistema de referencia Euleriano



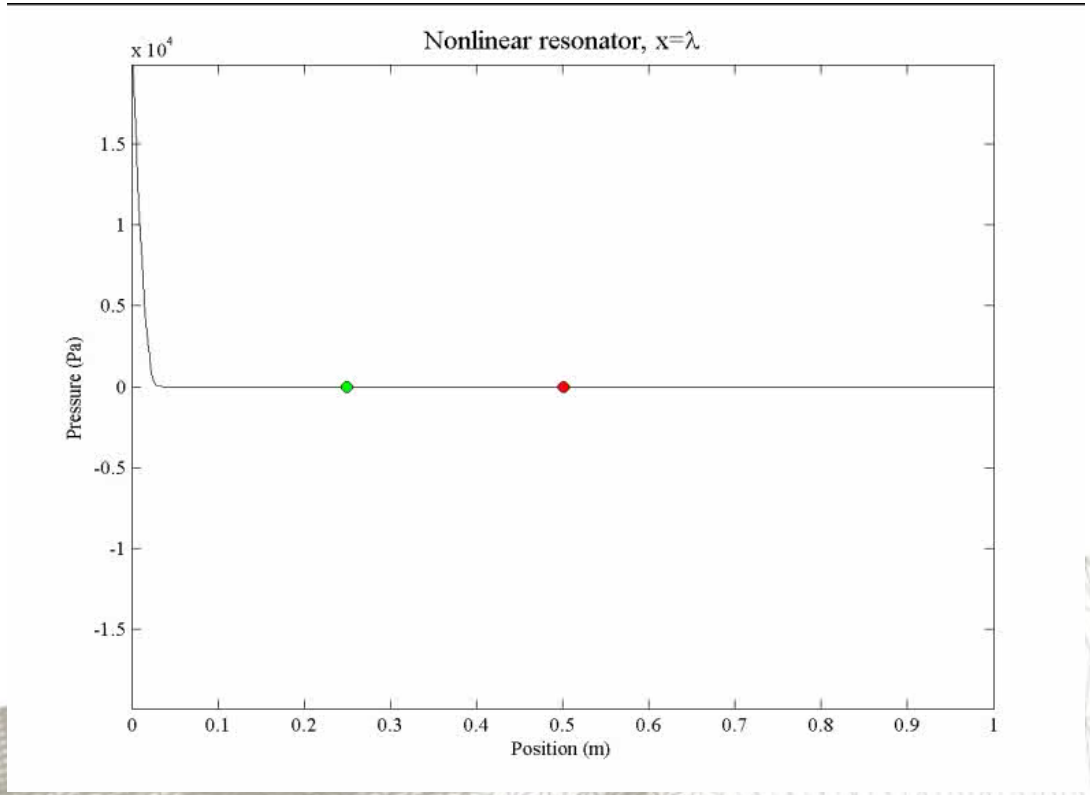




Rudenko et al.: J. Acoust. Soc. Am., Vol. 99, No. 5, May 1996

# 6. Validación y Resultados para Resonadores


- Introducción
- Modelo para Fluidos Termoviscosos
- Discretización Conservativa mediante FDTD
- Estabilidad
- ABC's
- Validación y Resultados
- Conclusiones


- Obtención de la distribución de presión en un resonador No lineal
  - Se generan ondas de choque estacionarias



# 7. CONCLUSIONES


- INTRODUCCIÓN
- MODELO PARA FLUIDOS TERMOVISCOSOS
- DISCRETIZACIÓN CONSERVATIVA MEDIANTE FDTD
- ESTABILIDAD
- ABC's
- VALIDACIÓN Y RESULTADOS
- CONCLUSIONES


- MÉTODO COMPUTACIONAL PARA LA SIMULACIÓN DE CAMPOS ACÚSTICOS EN RÉGIMEN NO LINEAL:
  - Condiciones iniciales y de contorno arbitrarias: *no restringido a aproximaciones paraxiales, etc…*
  - Método explícito: *algoritmo iterativo*
  - Estabilidad: *lineal y no lineal*
  - Condiciones de contorno absorbentes: *NL2L PML*
  - Validación: *La solución numérica converge cuando* $\Delta h \rightarrow 0$
  - Amplio abanico de fenómenos no lineales
    - Propagación y scattering de ondas de alta intensidad, Fuerza de radiación, Streaming, Resonadores
- ELEVADO COSTE COMPUTACIONAL

# 7. CONCLUSIONES


- INTRODUCCIÓN
- MODELO PARA FLUIDOS TERMOVISCOSOS
- DISCRETIZACIÓN CONSERVATIVA MEDIANTE FDTD
- ESTABILIDAD
- ABC's
- VALIDACIÓN Y RESULTADOS
- CONCLUSIONES


- LÍNEAS FUTURAS:
  - **Incorporar los esfuerzos transversales:** Simulación de tejidos blandos para aplicaciones ultrasónicas en medicina (diagnóstico/terapia)
  - **Incorporar procesos de relajación:** viscoelasticidad, relajación molecular, etc.
  - **Ampliar el sistema de coordenadas:**
    - Cilíndrico axisimétrico (memoria ≈ 2D)
    - Cartesianas 3D (recursos prohibitivos para muchas aplicaciones)

TECNIACUSTICA León · 2010

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA VALENCIA

IGIC Instituto de investigación para la gestión integrada de zonas costeras

# MUCHAS GRACIAS

## PREGUNTAS…

