Modelización de la Dinámica de una Esfera en el seno de un Medio Viscoelástico

Miguel Company[1], Noé Jiménez[1], José María Benlloch[1], Francisco Camarena[1]

[1]Instituto de Instrumentación para Imagen Molecular, Universitat Politècnica de València - CSIC, Valencia, España

Introducción

La evaluación de las propiedades mecánicas de los medios viscoelásticos es de interés en la medicina, donde se ha demostrado que las propiedades biomecánicas del tejido a menudo se correlacionan con su estado fisiológico (1), y en la industria, donde el conocimiento de las propiedades mecánicas del medio permite predecir las propiedades, apariencia, tratamiento y calidad de los polímeros (2), cementos (3), pinturas o alimentos (4).

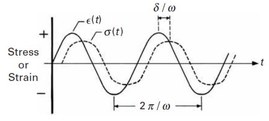
El propósito de este estudio es desarrollar un sistema mixto magnético-ultrasónico que permita estimar los parámetros viscoelásticos de un medio a partir del estudio del movimiento de una esfera introducida en este medio. Este movimiento está provocado por una fuerza magnética.

Objetivos principales:

- Comprender el modelo teórico del desplazamiento de la esfera en un medio incompresible, para el caso de un medio elástico y un medio viscoelástico.
- Estudiar el efecto de la elasticidad y la viscosidad del medio, sobre la dinámica del desplazamiento de la esfera.
- Desarrollar un sistema mixto magnético-ultrasónico que provoque desplazamientos en la esfera y que, a partir de estos, estime los valores de elasticidad y viscosidad del medio circundante.
- Obtener el valor de elasticidad y viscosidad de un phantom.

Modelo Teórico

- **Módulos de almacenamiento y de pérdidas** (5):



$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t = \varepsilon_0 \exp i(\omega t) \\ \sigma = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta) = \sigma_0 \exp i(\omega t + \delta) \end{cases} \quad \text{(Ec. 1)}$$

$$E(\omega)^* = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \exp i\delta = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(\cos\delta + i \sin\delta) = E(\omega)' + iE(\omega)'' \quad \text{(Ec. 2)}$$

o Análogamente: $$G(\omega)^* = \frac{\tau}{\gamma} = G(\omega)' + iG(\omega)'' \quad \text{(Ec. 3)}$$

donde:
» ω es la frecuencia de oscilación
» $E(\omega)^*$ y $G(\omega)^*$ son los módulos complejos de Young y de cizalla
» $E(\omega)'$ y $G(\omega)'$ son los módulos de almacenamiento de Young y cizalla
» $E(\omega)''$ y $G(\omega)''$ son los módulos de pérdidas de Young y cizalla

- Modelo viscoelástico lineal **Kevin-Voigt** (5):

$$G' = \mu; \quad G'' = \omega\eta \quad \text{(Ec. 4)}$$

donde:
» μ es el módulo elástico de cizalla
» η es el módulo viscoso de cizalla

- **Ecuación del movimiento de una esfera en un medio viscoelástico incompresible** (6):

$$-\nabla P + \mu\nabla^2 U + \eta\nabla^2 \frac{\partial U}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad \text{(Ec. 5)}$$

Medio Elástico

- Considerando un **medio elástico** (η=0), se obtiene la solución analítica de la Ec. 5, que describe el **desplazamiento de la esfera frente a una fuerza impulsiva rectangular** (6):

$$U(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{6\pi\mu R}\left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\left(\frac{c_t}{R}\right)\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\left(\frac{c_t}{R}\right)\lambda_2 t}\right), & 0 \le t \le t_0 \\ \frac{F_0}{6\pi\mu R}\left(\left(1 - e^{-\left(\frac{c_t}{R}\right)\lambda_1 t_0}\right)\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\left(\frac{c_t}{R}\right)\lambda_1 t} - \left(1 - e^{-\left(\frac{c_t}{R}\right)\lambda_2 t_0}\right)\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\left(\frac{c_t}{R}\right)\lambda_2 t}\right), & t \ge t_0 \end{cases} \quad \text{(Ec. 6)}$$

donde:
» $\lambda_{1,2} = \frac{3}{2}\frac{-3 \pm \sqrt{5 - 8\beta}}{1 + 2\beta}$
» F_0 es la fuerza externa aplicada
» R es el radio de la esfera
» β es la relación entre la densidad de la esfera y la densidad del medio
» t_0 es la duración del pulso

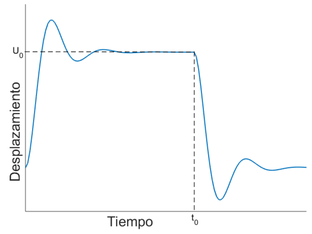


Figura 1. - Curva teórica de desplazamiento de la esfera.

- **Desplazamiento en la zona estática** (6): $U_0 = \frac{F_0}{6\pi\mu R}$. (Ec. 7)

- **Frecuencia de oscilación** en zona transitoria (6): $f = \frac{3 \cdot \sqrt{(\mu/\rho)}}{4\pi R}\frac{\sqrt{8\beta - 5}}{1 + 2\beta}$. (Ec. 8)

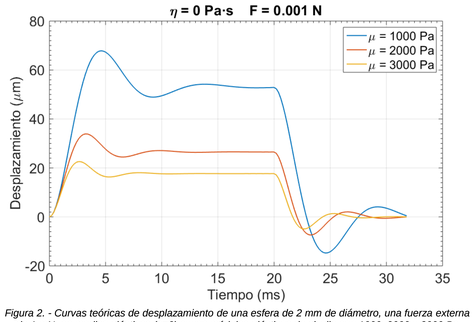


Figura 2. - Curvas teóricas de desplazamiento de una esfera de 2 mm de diámetro, una fuerza externa de 1 mN, en medios elásticos (η=0) cuyos módulos elásticos de cizalla son 1000, 2000 y 3000 Pa respectivamente.

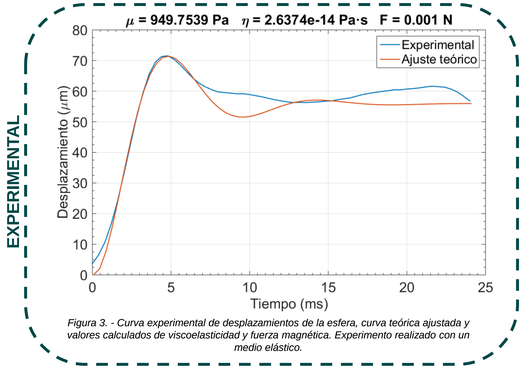


Figura 3. - Curva experimental de desplazamientos de la esfera, curva teórica ajustada y valores calculados de viscoelasticidad y fuerza magnética. Experimento realizado con un medio elástico.

Medio Viscoelástico

- Considerando un **medio viscoelástico** (η >0), el **desplazamiento de la esfera** se expresa mediante la siguiente ecuación integral (6):

$$U(t) = -\frac{iF_0}{12\pi^2 R}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(e^{i\omega t_0} - 1\right)e^{-i\omega t}}{\omega(\mu - i\omega\eta)\left(1 - ikR - \frac{k^2R^2(1 + 2\beta)}{9}\right)} d\omega\,, \quad \text{(Ec. 9)}$$

donde:
» ω es la frecuencia angular
» k es número de onda complejo

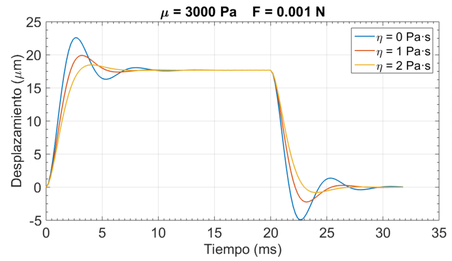


Figura 4. - Curvas teóricas de desplazamiento de una esfera de 2 mm de diámetro, una fuerza externa de 1 mN, en medios elásticos (η=0) cuyos módulos elásticos de cizalla son 1000, 2000 y 3000 Pa respectivamente

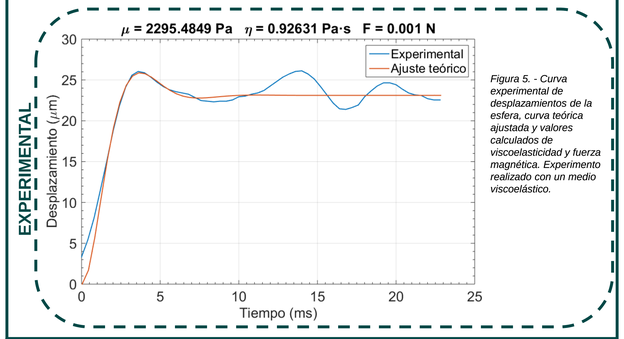


Figura 5. - Curva experimental de desplazamientos de la esfera, curva teórica ajustada y valores calculados de viscoelasticidad y fuerza magnética. Experimento realizado con un medio viscoelástico.

Materiales y Métodos

El funcionamiento del sistema mixto se compone de los siguientes elementos:

- El **sistema de excitación magnética ejerce una fuerza impulsiva** sobre la esfera introducida en el phantom.
- El **sistema de imagen por ultrasonidos** se encarga de **monitorizar la posición de la esfera** a lo largo del tiempo.
- El **sistema informático controla y ejecuta** simultáneamente la excitación magnética y la adquisición de señales de ultrasonidos.
- Por último, el sistema informático realiza el **post-procesado** de la señal para obtener los parámetros viscoelásticos del phantom.

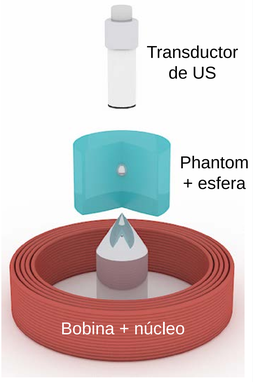


Fig. 6 – Esquema de los elementos básicos del sistema creado.

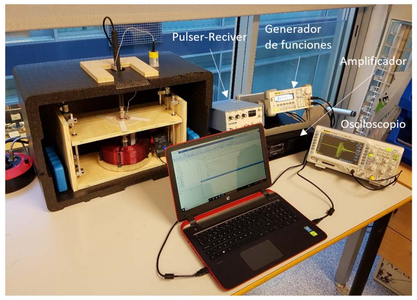


Fig. 7 - Imagen del Sistema Mixto Magnético-Ultrasónico completo.

Conclusiones

- El desplazamiento de la esfera frente a una fuerza externa impulsiva presenta una curva con dos zonas diferenciadas: una **zona estática** y una **zona transitoria** con oscilaciones. La zona estática viene determinada por la fuerza ejercida y el módulo elástico de cizalla. En la zona transitoria, la frecuencia de oscilación aporta el módulo elástico de cizalla, en el caso de un medio elástico.
- La **elasticidad** del medio influye en la frecuencia de oscilación y en la amplitud del desplazamiento (Figura 2). La **viscosidad** del medio provoca pérdidas, que se traducen en una atenuación de la oscilación de la esfera (Figura 4).
- El algoritmo de optimización desarrollado ajusta la curva teórica de desplazamiento (modelo teórico) a la curva experimental, para así estimar los valores de μ, η y fuerza magnética.
- Se puede observar en los desplazamientos experimentales que la **zona transitoria coincide con el ajuste teórico**, pero en la zona estática aparecen vibraciones debidas a la propagación de ondas transversales a través del phantom (Figuras 3 y 5).
- A la vista de los resultados obtenidos, este sistema presenta una buena **precisión para observar el movimiento de la esfera y para estimar los parámetros viscoelásticos y la fuerza magnética**.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por la Promoción del empleo joven e implementación de la Garantía Juvenil en el marco del Programa Operativo Empleo Juvenil (POEJ) 2014-2020 CS2_VAL_I3M_006, la Iniciativa de Empleo Juvenil y el Fondo Social Europeo, el proyecto del Plan Nacional TEC2016-80976-R y el proyecto de la GVA AICO2016-108.

Referencias

1. Aglyamov, S. R., & Skovoroda, A. R. (2000). Mechanical properties of soft biological tissues. Biophysics (Oxf), 45, 1103–1111.
2. Shaw, M. T., & MacKnight, W. J. (2005). Introduction to Polymer Viscoelasticity (Tercera ed.). John Wiley & Sons.
3. Fana, L. F., Wong, L. N., & Ma, G. W. (2013). Experimental investigation and modeling of viscoelastic behavior of concrete. Construction and Building Materials, 48, 814-821.
4. McKenna, B. M. (2003). Texture in Food. Woodhead Publishing.
5. Meyers, M. A., & Chawla, K. K. (1998). Mechanical Behavior of Materials. Cambridge University Press.
6. Aglyamov, S. R., Karpiouk, A. B., Ilinskii, Y. A., Zabolotskaya, E. A., & Emelianov, S. Y. (2007). Motion of a solid sphere in a viscoelastic medium in response to applied acoustic radiation force: Theoretical analysis and experimental verification. Journal of the Acoustical Society of America, 122(4), 1927-1936.