





Modelización de cerámicas y transductores piezoeléctricos vibrando en espesor mediante matrices de transferencia

Noé Jiménez[1], Francisco Camarena[1,2]

[1] Instituto de Instrumentación para Imagen Molecular (i3M), CSIC - UPV (Spain)
[2] Departamento de Física Aplicada, Universitat Politècnica de València (Spain)

VI Jornadas de Modelización Matemática, 25 Mayo 2018, Valencia (Spain)

Introducción

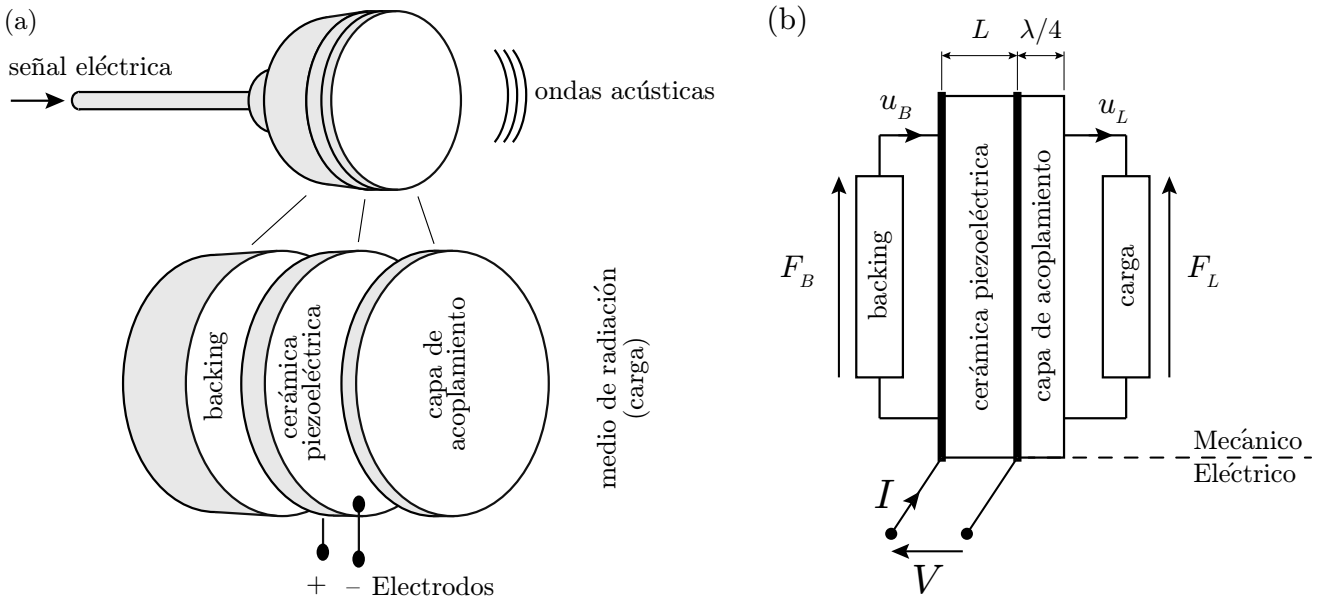
Objetivo

Desarrollar un método simple para la modelización de cerámicas simples y transductores vibrando en modo espesor.

1. **Contexto**:
   - 2º Grado de Telecomunicación, Sonido e Imagen: *Ultrasonidos*
   - Máster en Ingeniería acústica: *Ultrasonidos*
2. **Física**:
   - Elasticidad
   - Electromagnetismo
   - Acústica
3. **Modelización**:
   - Sistemas ecuaciones acopladas en derivadas parciales.
   - Álgebra lineal básica: producto matricial, cálculo de determinante, cálculo tensorial.
   - Transformadas de Fourier empleado resultados numéricos

El transductor piezoeléctrico

Permite hacer uso del efecto piezoeléctrico para emitir/detectar ondas acústicas



Elementos del transductor

1. Cerámica: material piezoeléctrico (elástico+eléctrico).
2. Capa trasera (*backing*), material elástico
3. Capa de acoplo, material elástico
4. Red de acoplo eléctrica, componentes puramente eléctricos

El transductor piezoeléctrico

Objetivo: Encontrar una matriz de transferencia total $\mathbf{T}$:

$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} F_L \\ u_L \end{bmatrix}, \tag{1}$$

dónde $\mathbf{T}$ viene dada por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Para un sistema compuesto por N elementos:

$$\mathbf{T} = \prod_{n}^{n=N} \mathbf{T}_n, \tag{3}$$

dónde $\mathbf{T}_n$ es la matriz de transferencia del elemento n.

- Para un sistema simétrico $T_{11} = T_{22}$
- Para un sistema recíproco, $T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1$.

El transductor piezoeléctrico es recíproco pero no simétrico.

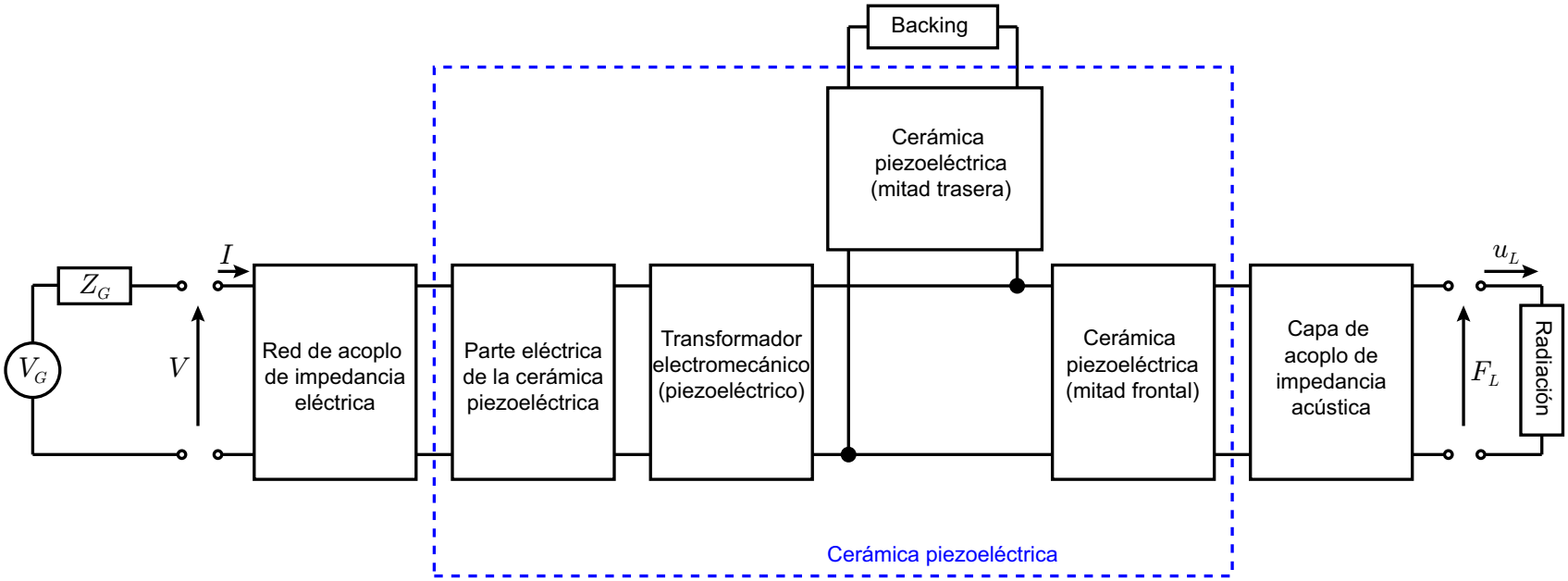
El transductor piezoeléctrico

Modelo generalizado de matrices de transferencia

El sistema completo se caracteriza por una matriz de transmisión total

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_N \mathbf{T}_E \mathbf{T}_\phi \mathbf{T}_\perp \mathbf{T}_F \mathbf{T}_{\lambda/4}, \tag{4}$$

dónde cada matriz representa un bloque.



Suponemos que el “backing” presenta una impedancia de carga Z'_B.

El transductor piezoeléctrico

Modelo generalizado de matrices de transferencia
Matriz de transmisión total

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_N \mathbf{T}_E \mathbf{T}_\phi \mathbf{T}_\perp \mathbf{T}_F \mathbf{T}_{\lambda/4}, \tag{5}$$

$\mathbf{T}_N$ red de acoplo de impedancia eléctrica,
$\mathbf{T}_E$ componentes puramente eléctricos de la cerámica piezoeléctrica,
$\mathbf{T}_\phi$ transformador electromecánico,
$\mathbf{T}_\perp$ mitad de la cerámica trasera con el “backing”,
$\mathbf{T}_F$ mitad de la cerámica delantera,
$\mathbf{T}_{\lambda/4}$ capa de acoplo de impedancia.

Vamos por partes ...

1. El material piezoeléctrico
2. La cerámica piezoeléctrica
3. El resto de elementos

El material piezoeléctrico

Elasticidad:
Las ecuaciones constitutivas son

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{c} : \mathbf{S}, \tag{6}$$

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{s} : \mathbf{T}, \tag{7}$$

dónde

- $\mathbf{T}$ tensor de esfuerzos [Pa] (rango 2),
- $\mathbf{S}$ tensor de deformaciones [adimensional] (rango 2),
- $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{s}^{-1}$ tensor de módulos elásticos [Pa] / compliancias (rango 4).

y el producto interno de los tensores viene dado por

$$T_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} c_{ijkl} S_{kl} \tag{8}$$

para $i, j = 1, 2, 3$ o x, y, z.
Lo mismo podemos escribir empleando la convención de Einstein para los índices repetidos como

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} \tag{9}$$

El material piezoeléctrico

Electricidad:
Las ecuaciones constitutivas son

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}, \tag{10}$$

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{D}, \tag{11}$$

$$\tag{12}$$

donde

- $\mathbf{E}$ vector de campo eléctrico [V/m] (rango 1),
- $\mathbf{D}$ vector de desplazamiento eléctrico [C/m^2] (rango 1),
- $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\beta}^{-1}$ tensor de permitividad eléctrica [F/m], y su inversa (rango 2).

El material piezoeléctrico

Piezoelectricidad:

1. Efecto piezoeléctrico **directo**:
   - Al aplicar un esfuerzo mecánico, para que se obtenga un equilibrio de fuerzas el material se forma.
   - Debido a la estructura de algunos cristales que poseen especial simetría, al deformarse el material las cargas se distribuyen de manera asimétrica.
   - Aparece un campo eléctrico.

2. Efecto piezoeléctrico **inverso**:
   - Al aplicar un campo eléctrico externo para que se obtenga el equilibrio electrostático aparece un desplazamiento eléctrico.
   - Debido a la asimetría, el equilibrio solo se produce cuando el material está deformado.
   - Aparece un campo esfuerzo mecánico.

El material piezoeléctrico

Piezoelectricidad:
Las ecuaciones constitutivas de un material piezoeléctrico son

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{c}^{E}\mathbf{S} - \mathbf{e}^{t}\boldsymbol{E}, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\varepsilon}^{S}\boldsymbol{E} + \mathbf{e}\boldsymbol{S}. \tag{14}$$

En notación indexada:

$$T_i = c_{ij}^{E} s_j - \mathrm{e}_{im} E_m, \qquad D_m = \varepsilon_{mn}^{S} E_n + \mathrm{e}_{im} S_i, \tag{15}$$

$$S_i = s_{ij}^{E} T_j + d_{im} E_m, \qquad D_m = \varepsilon_{mn}^{T} E_n + d_{im} T_i, \tag{16}$$

$$T_i = c_{ij}^{D} S_j - h_{im} D_m, \qquad E_m = \beta_{mn}^{S} D_n - h_{im} S_i, \tag{17}$$

$$S_i = s_{ij}^{D} T_j + g_{im} D_m, \qquad E_m = \beta_{mn}^{T} D_n - g_{im} T_i. \tag{18}$$

Recordar que:

$$\mathbf{c}^{E} = \frac{1}{\mathbf{s}^{E}}, \quad \mathbf{c}^{D} = \frac{1}{\mathbf{s}^{D}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{S} = \frac{1}{\boldsymbol{\beta}^{S}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{D} = \frac{1}{\boldsymbol{\beta}^{D}}. \tag{19}$$

Pero por el contrario:

$$\mathbf{c}^{E} \neq \mathbf{c}^{D}, \quad \mathbf{s}^{E} \neq \mathbf{s}^{D}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{S} \neq \boldsymbol{\varepsilon}^{T}, \quad \boldsymbol{\beta}^{S} \neq \boldsymbol{\beta}^{T}, \tag{20}$$

El material piezoeléctrico

Expresión matricial

Por ejemplo, en tres dimensiones espaciales, el sistema de ecuaciones constitutivas (13-14) para un material piezoeléctrico se puede desarrollar como

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & s_{14}^E & s_{15}^E & s_{16}^E & d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ s_{21}^E & s_{22}^E & s_{23}^E & s_{24}^E & s_{25}^E & s_{26}^E & d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ s_{31}^E & s_{32}^E & s_{33}^E & s_{34}^E & s_{35}^E & s_{36}^E & d_{31} & d_{32} & d_{33} \\ s_{41}^E & s_{42}^E & s_{43}^E & s_{44}^E & s_{45}^E & s_{46}^E & d_{41} & d_{42} & d_{43} \\ s_{51}^E & s_{52}^E & s_{53}^E & s_{54}^E & s_{55}^E & s_{56}^E & d_{51} & d_{52} & d_{53} \\ s_{61}^E & s_{62}^E & s_{63}^E & s_{64}^E & s_{65}^E & s_{66}^E & d_{61} & d_{62} & d_{63} \\ d_{11} & d_{12} & d_{63} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & \varepsilon_{11}^T & \varepsilon_{12}^T & \varepsilon_{13}^T \\ d_{21} & d_{22} & d_{63} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & \varepsilon_{21}^T & \varepsilon_{22}^T & \varepsilon_{23}^T \\ d_{31} & d_{32} & d_{63} & d_{34} & d_{35} & d_{36} & \varepsilon_{31}^T & \varepsilon_{32}^T & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

dónde empleamos la convención para las componentes numerales:
$1 = xx$, $2 = yy$, $3 = zz$, $4 = xy$, $5 = yz$ y $6 = zx$.

El material piezoeléctrico

Modo espesor: Reducción a una dimensión:

- Consideramos vibraciones que se producen solamente en **espesor**, ignoraremos lo que ocurre en otras direcciones, reduciendo el sistema de ecuaciones a variaciones en la dirección x_3. Así, el sistema de ecuaciones se reduce a

$$T_3 = c_{33}^D S_{33} - h_{33} D_3, \tag{21}$$

$$E_3 = \beta_{33}^S D_3 - h_{33} S_3. \tag{22}$$

- La expresión matricial se reduce a

$$\begin{bmatrix} T_{33} \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{33}^D & -h_{33} \\ -h_{33} & \beta_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_3 \\ D_3 \end{bmatrix} \tag{23}$$

El material piezoeléctrico

Constantes piezoeléctricas, elásticas y eléctricas

El cálculo y conversión de unas constantes piezoeléctricas en otras puede ser tedioso en un principio.

- Podemos escribir el sistema como

$$\begin{bmatrix} S_3 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{33}^D & -h_{33} \\ -h_{33} & \beta_{33}^S \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T_{33} \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{33}^E & d_{33} \\ d_{33} & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{33} \\ E_3 \end{bmatrix},$$

- Nos permite relacionar las distintas constantes elásticas/eléctricas y piezoeléctricas del sistema. Recuerda que:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \qquad \det(A) = ad - bc,$$

- Modo espesor:

$$c_{33}^D = c_{33}^E + \frac{\mathrm{e}_{33}^2}{\varepsilon_{33}^S}, \quad s_{33}^D = s_{33}^E - \frac{d_{33}^2}{\varepsilon_{33}^T}, \quad \varepsilon_{33}^T = \varepsilon_{33}^S + \frac{\mathrm{e}_{33}^2}{c_{33}^E}, \quad \beta_{33}^T = \beta_{33}^S - \frac{h_{33}^2}{c_{33}^D},$$

$$c_{33}^E = c_{33}^D - \frac{h_{33}^2}{\beta_{33}^S}, \quad s_{33}^E = s_{33}^D + \frac{g_{33}^2}{\beta_{33}^T}, \quad \varepsilon_{33}^S = \varepsilon_{33}^T - \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E}, \quad \beta_{33}^S = \beta_{33}^T + \frac{g_{33}^2}{s_{33}^D},$$

El material piezoeléctrico

Dinámica del sistema: Cerramos el sistema con

- **Balance de fuerzas:** 2ª Ley de Newton:

$$\rho_p \frac{\partial v_3}{\partial t} = \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3}, \tag{24}$$

  - donde ρ_p es la densidad en el material piezoeléctrico
  - v_3 es la velocidad de partícula en la dirección x_3.

- **Deformación unitaria:**
  En función del desplazamiento de partícula, ξ_3,

$$S_{33} = \frac{\partial \xi_3}{\partial x}, \tag{25}$$

  y la velocidad de partícula

$$v_3 = \frac{\partial \xi_3}{\partial t}, \tag{26}$$

  la deformación se relaciona con la velocidad de partícula como:

$$\frac{\partial S_{33}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}\right) = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \xi_3}{\partial t}\right) = \frac{\partial v_3}{\partial x_3}. \tag{27}$$

El material piezoeléctrico

Dinámica del sistema

Si diferenciamos con respecto del tiempo las ecuaciones constitutivas,

$$\rho_p \frac{\partial v_3}{\partial t} = \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3}, \tag{28}$$

$$\frac{T_{33}}{\partial t} = c_{33}^D \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - h_{33} \frac{\partial D_3}{\partial t}, \tag{29}$$

$$\frac{E_3}{\partial t} = \beta_3^S \frac{D_3}{\partial t} - h_{33} \frac{\partial v_3}{\partial x_3}. \tag{30}$$

Estas ecuaciones describen el sistema en la dirección x_3.

- Suponemos que los otros módulos piezoeléctricos y elásticos son nulos (cosa que no ocurre en una cerámica real).

- **¿Cómo encontramos una solución analítica?**

El material piezoeléctrico

Soluciones analíticas:

- Las ecuaciones que rigen la dinámica son

$$\rho_p \frac{\partial v_3}{\partial t} = \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \tag{31}$$

$$T_3 = c_{33}^D S_{33} - h_{33} D_3, \tag{32}$$

- Sustituyendo, obtenemos

$$\rho_p \frac{\partial v_3}{\partial t} = c_{33}^D \frac{\partial S_{33}}{\partial x_3} - h_{33} \frac{\partial D_3}{\partial x_3} \tag{33}$$

- Baja frecuencia:
  - El sistema se comporta de manera similar a un condensador.
  - La diferencia de potencial es aproximadamente constante.
  - El gradiente del desplazamiento eléctrico es nulo $\partial D_3/\partial x = 0$
- Ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial t^2} = c_p^2 \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x_3^2}, \quad \text{donde} \quad c_p = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho_p}} \tag{34}$$

- El sistema soporta **ondas longitudinales** en la dirección del polarización.

El material piezoeléctrico

Solución general

La solución general armónica de la ecuación de onda es

$$\xi_3 = [C_1 \exp(ik_p x_3) + C_2 \exp(-ik_p x_3)] \exp(i\omega t) \tag{35}$$

para una onda de frecuencia angular ω.

Solución particular

Necesitamos imponer condiciones de contorno:

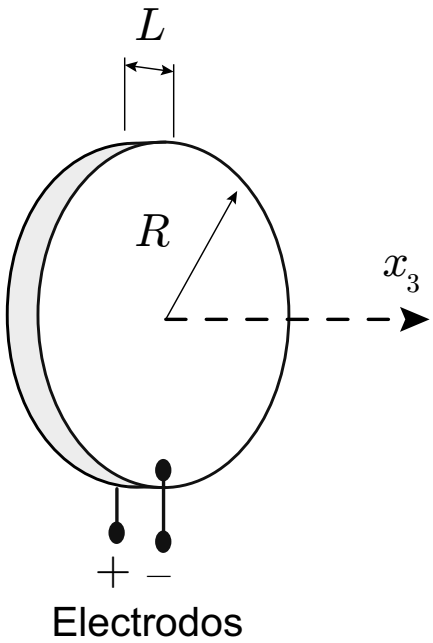
1. Cómo cortamos el material piezoeléctrico
2. Qué elementos eléctricos acoplamos
3. Qué elementos mecánicos acoplamos
4. Cómo excitamos el sistema

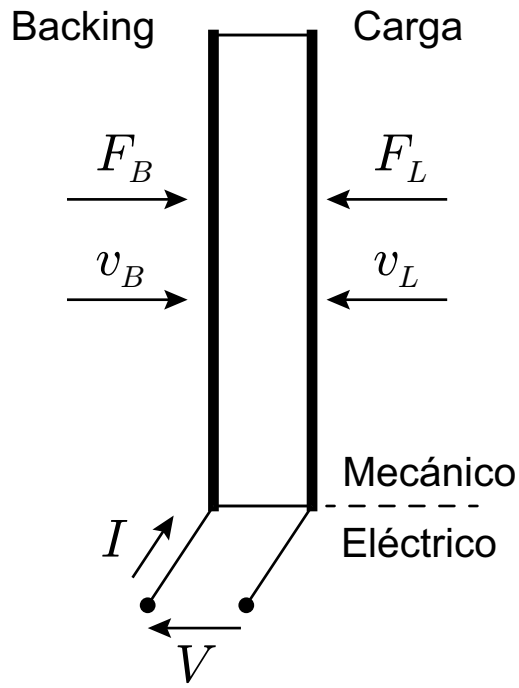
La cerámica piezoeléctrica

Elementos de la cerámica

Cortamos el material piezoeléctrico, e.g., disco $A = \pi R^2$.

1. Cerámica, material piezoeléctrico
2. Electrodos, placas de metal conductor
3. Medio de carga, medio acústico (agua, aire, ...)
4. Medio trasero, medio acústico (aire, absorbente,...)





La cerámica piezoeléctrica

Parámetros

- Eléctricos

$$I = i\omega A D_3, \qquad V = \int_0^z E_3 d_z. \tag{36}$$

  - V, diferencia de potencial a ambos lados de la cerámica,
  - I, corriente que atraviesa la superficie A, a una frecuencia ω.

- Acústicos

$$F_B = T_3 A|_{x_3=0}\,, \qquad v_B = \left.\frac{\partial \xi_3}{\partial t}\right|_{x_3=0}, \tag{37}$$

$$F_L = T_3 A|_{x_3=L}\,, \qquad v_L = \left.\frac{\partial \xi_3}{\partial t}\right|_{x_3=L} \tag{38}$$

  - F_i, fuerza en la cara i,
  - v_i, velocidad de partícula, en la cara i.

$$Z_p = \rho_p c_p, \qquad k_p = \frac{\omega}{c_p}, \tag{39}$$

  - Z_p, impedancia acústica característica del material piezoeléctrico,
  - k_p, número de onda cuando se propaga una onda de frecuencia ω.

La cerámica piezoeléctrica

- **Sistema de ecuaciones**: Sistema de ecuaciones diferenciales acopladas

$$\rho_p \frac{\partial v_3}{\partial t} = \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3}, \tag{40}$$

$$\frac{T_{33}}{\partial t} = c_{33}^D \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - h_{33} \frac{\partial D_3}{\partial t}, \tag{41}$$

$$\frac{E_3}{\partial t} = \beta_3^S \frac{D_3}{\partial t} - h_{33} \frac{\partial v_3}{\partial x_3}. \tag{42}$$

Función del tiempo, t, y espacio x_3.

- **Solución particular**: Sistema de relaciones algebraicas

$$F_L = \frac{AZ_p}{i \tan(k_p L)} v_F + \frac{AZ_p}{i \sin(k_p L)} v_B + \frac{h_{33}}{i\omega} I \tag{43}$$

$$F_B = \frac{AZ_p}{i \sin(k_p L)} v_F + \frac{AZ_p}{i \tan(k_p L)} v_B + \frac{h_{33}}{i\omega} I \tag{44}$$

$$V = \frac{h_{33}}{i\omega} v_F + \frac{h_{33}}{i\omega} v_B + \frac{L}{iA\varepsilon_{33}^S} I \tag{45}$$

Función de la frecuencia ω, evaluadas en dos posiciones, $x_3 = 0$ y $x_3 = L$.

La cerámica piezoeléctrica

Podemos expresar el sistema de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} F_L \\ F_B \\ V \end{bmatrix} = \mathbf{T}_3 \begin{bmatrix} v_L \\ v_B \\ I \end{bmatrix}, \tag{46}$$

Donde la matriz que caracteriza la cerámica es

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} Z_p/i\tan(k_pL) & Z_p/i\sin(k_pL) & h_{33}/i\omega \\ Z_p/i\sin(k_pL) & Z_p/i\tan(k_pL) & h_{33}/i\omega \\ h_{33}/i\omega & h_{33}/i\omega & 1/i\omega C_0^S \end{bmatrix}, \tag{47}$$

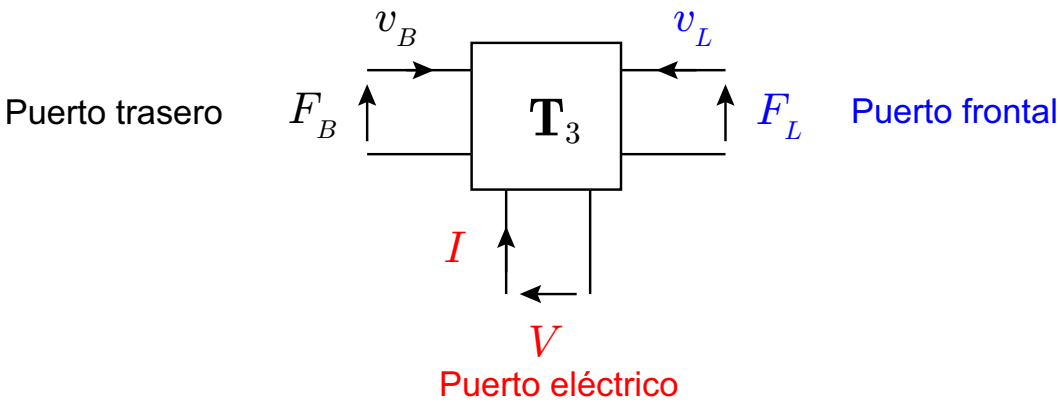
dónde $C_0^S = \varepsilon_{33}^S A/L$ es la capacidad del condensador.

- **¿Podemos reducir aún más el sistema?**

Sí, si introducimos una relación conocida en el puerto trasero (F_B y v_B).

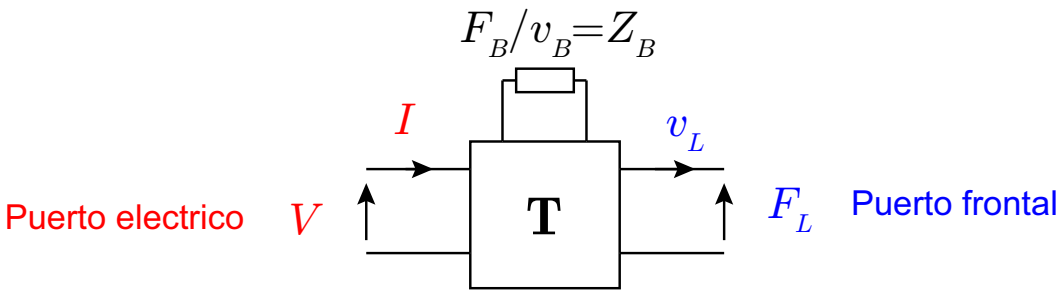
La cerámica piezoeléctrica

1. **Sistema de tres puertos:** modelo de cerámica aislada



La cerámica nunca vibra aislada, si existe una relación entre F_B y v_B, podemos reducir el sistema de tres puertos a uno de dos.

2. **Modelo de dos puertos:** modelo de transductor



La relación F_B y v_B viene dada por los materiales de la capa trasera.

La cerámica piezoeléctrica

Finalmente, la cerámica estará caracterizado por una matriz $\mathbf{T}$:

$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} F_L \\ u_L \end{bmatrix}, \tag{48}$$

Es más, podemos expresar esa matriz como el producto de los elementos que componen el sistema:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_E \mathbf{T}_\phi \mathbf{T}_\perp \mathbf{T}_F = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}. \tag{49}$$

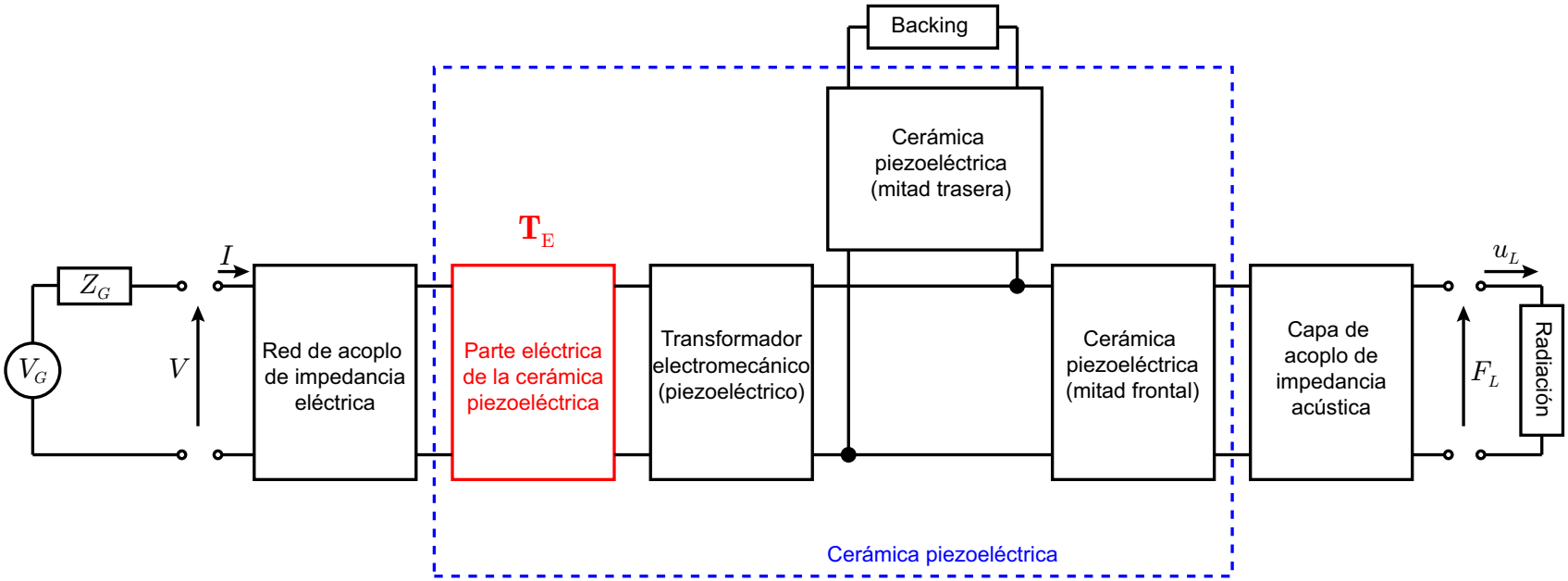
Cada matriz tiene una interpretación **física**.

La cerámica piezoeléctrica

Componentes eléctricos de la cerámica piezoeléctrica

Suma en serie de dos impedancias concentradas, Z_E. Las impedancias se conectan en serie a la línea. La matriz se escribe como

$$\mathbf{T}_E = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{Z_E} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \left(\frac{1}{i\omega C_0^S} - \frac{h_{33}^2 \sin(k_p L)}{i\omega^2 Z_p A} \right)^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (50)$$



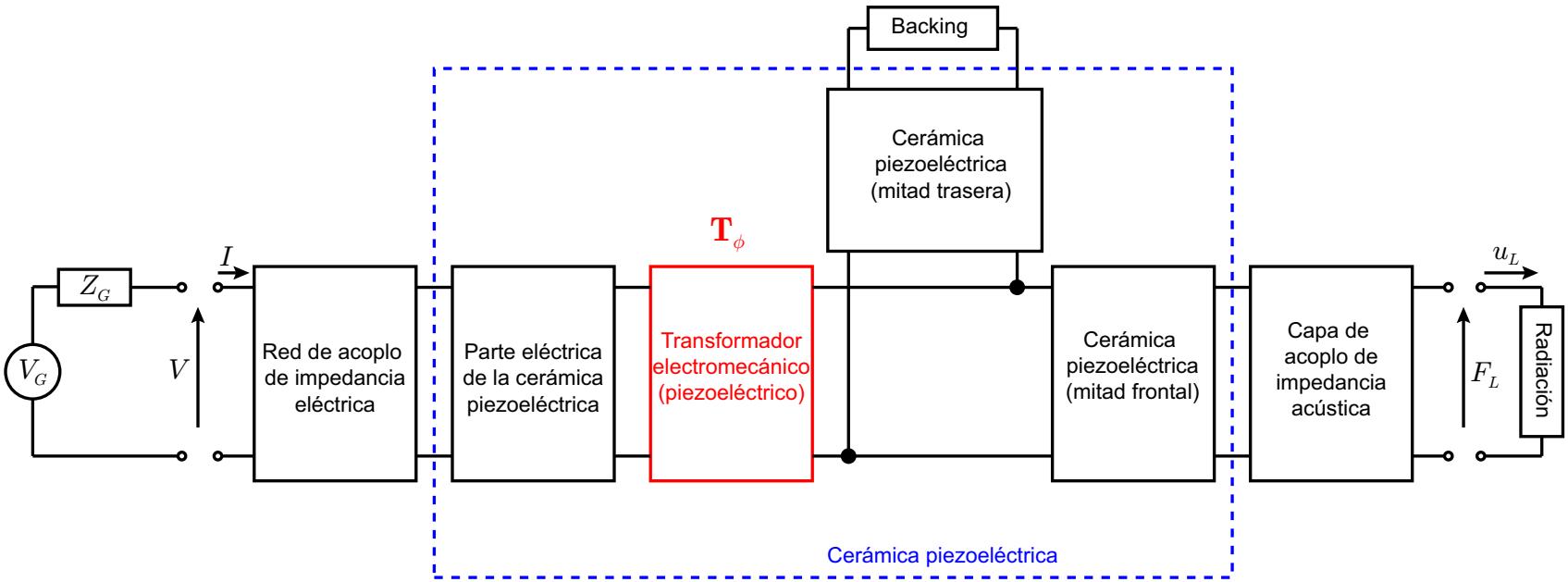
La cerámica piezoeléctrica

Transformador electromecánico

El transformador electromecánico, $\mathbf{T}_\phi$, es modelizado mediante

$$\mathbf{T}_\phi = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & 1/\phi \end{bmatrix}, \tag{51}$$

con la relación de transformación $\phi = 2h_{33}\sin(k_pL/2)/\omega Z_pA$.

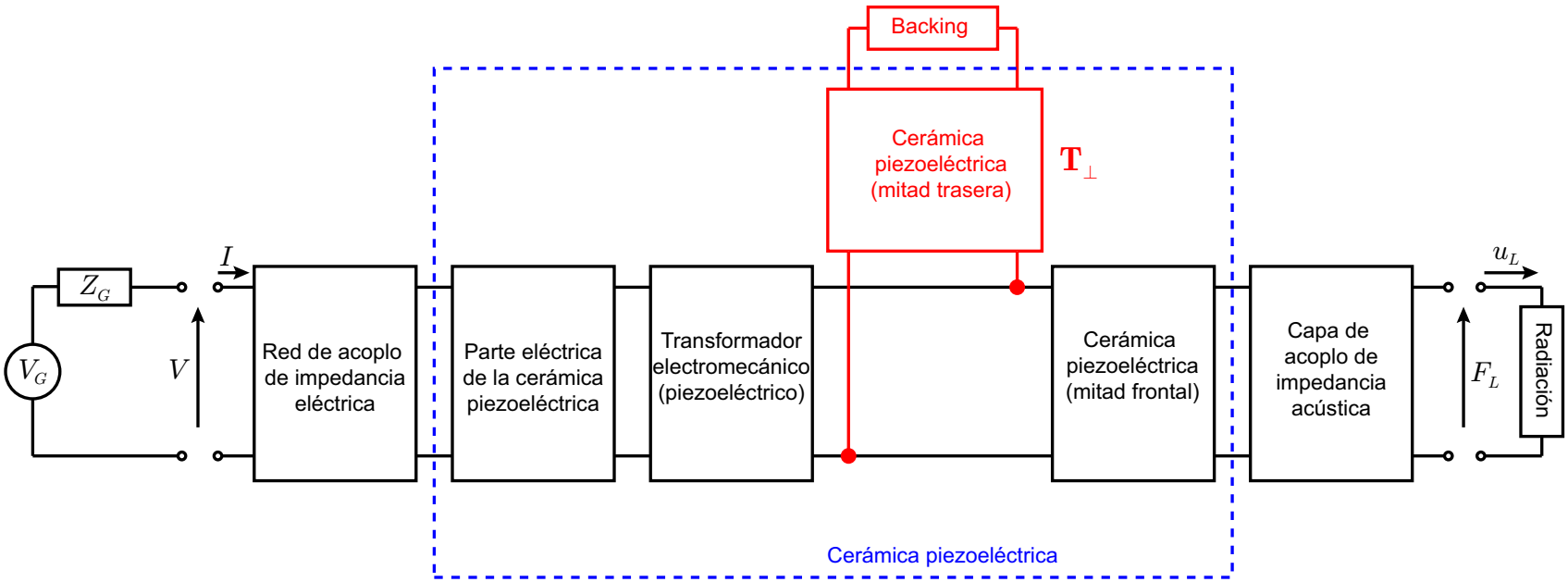


La cerámica piezoeléctrica

Mitad de la cerámica trasera

Suponiendo que el "backing" es perfectamente absorbente y no existen modos de resonancia en él, $Z_B = \rho_B c_B$, mitad de la cerámica trasera se modeliza como

$$\mathbf{T}_\perp = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Z_\perp & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{Z_p + iZ_B \tan(k_p L/2)}{Z_p' \left(Z_B + iZ_p \tan(k_p L/2)\right)} & 1 \end{bmatrix}. \qquad (52)$$



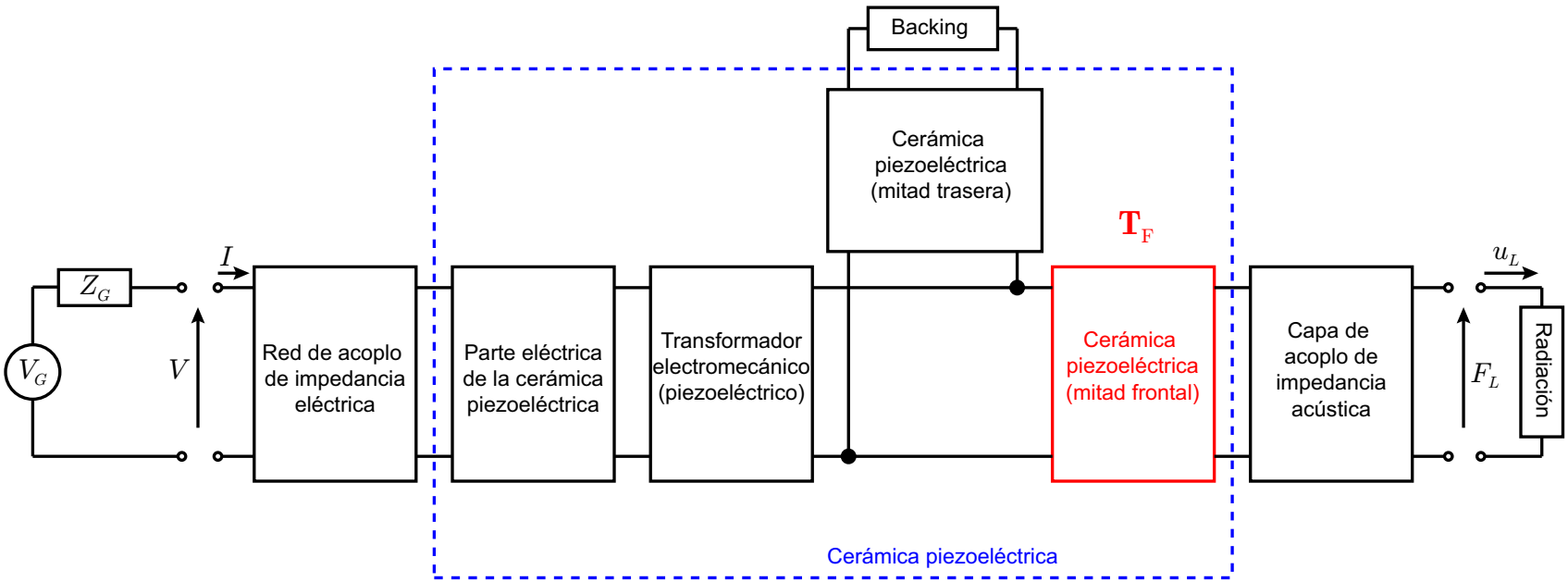
La cerámica piezoeléctrica

Mitad de la cerámica frontal

La mitad de la cerámica frontal, $\mathbf{T}_F$, se modeliza como

$$\mathbf{T}_{\mathrm{F}} = \begin{bmatrix} \cos(k_p L/2) & iZ'_p \sin(k_p L/2) \\ i\sin(k_p L/2)/Z'_p & \cos(k_p L/2) \end{bmatrix}. \tag{53}$$

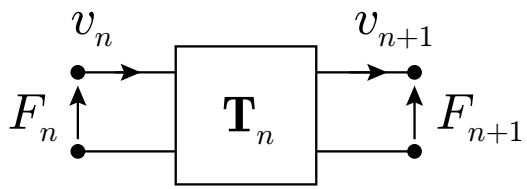
que no es más que una matriz de propagación para una capa de espesor $L/2$.



Transductor

Matriz de propagación

Cuando disponemos de una capa de material elástico, podemos relacionar la fuerza en ambos extremos de la capa (F_n, F_{n+1}) con la velocidad de partícula (u_n, u_{n+1}) empleando una matriz de transferencia,



que escribimos como

$$\begin{bmatrix} F_n \\ v_n \end{bmatrix} = \mathbf{T}_n \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix}. \tag{54}$$

La matriz de transmisión viene dada por

$$\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} \cos(k_n L_n) & iZ'_n \sin(k_n L_n) \\ i\sin(k_n L_n)/Z'_n & \cos(k_n L_n) \end{bmatrix}, \tag{55}$$

dónde k_n es el número de onda y $Z_n = \rho_n c_n A$ la impedancia.

- **Pueden ser complejos si el material tiene pérdidas.**

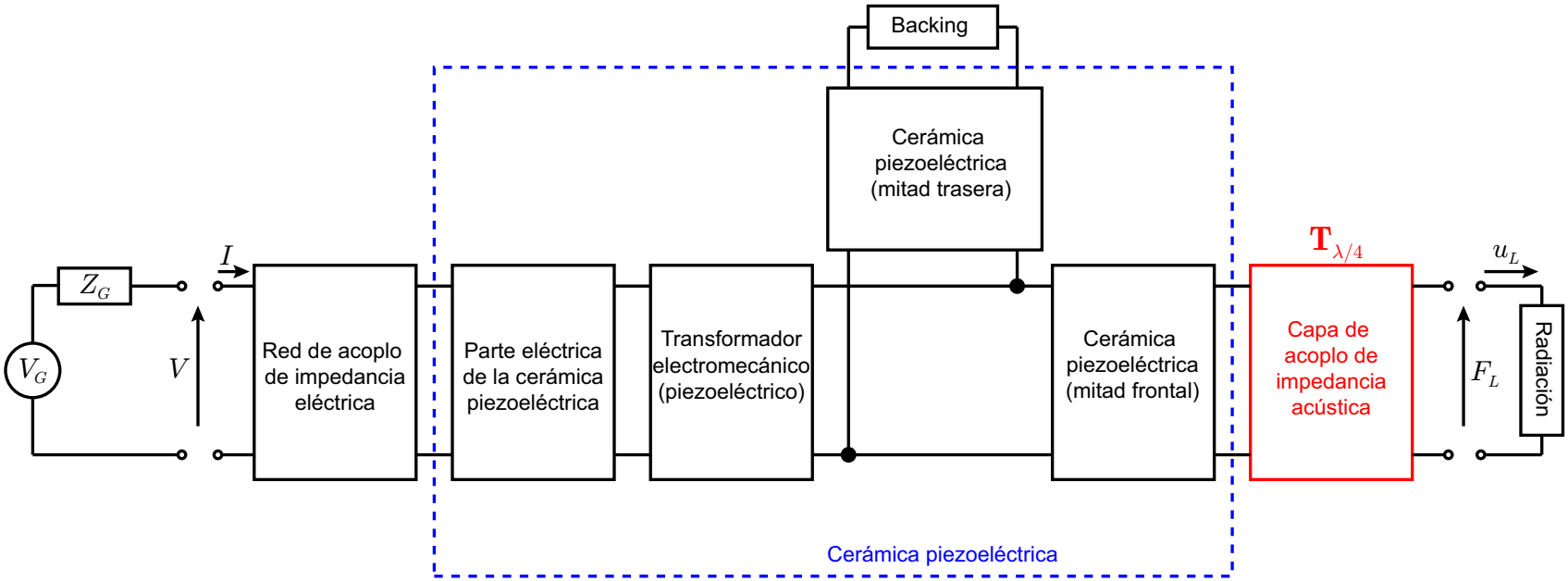
Transductor

Capa de adaptación de impedancia

La capa de acoplo de impedancia, $\mathbf{T}_{\lambda/4}$, se modeliza como

$$\mathbf{T}_{\lambda/4} = \begin{bmatrix} \cos\left(k_{\lambda/4} L_{\lambda/4}\right) & iZ'_{\lambda/4} \sin\left(k_{\lambda/4} L_{\lambda/4}\right) \\ i \sin\left(k_{\lambda/4} L_{\lambda/4}\right)/Z'_{\lambda/4} & \cos\left(k_{\lambda/4} L_{\lambda/4}\right) \end{bmatrix}, \tag{56}$$

dónde $k_{\lambda/4}$, $Z'_{\lambda/4}$ y $L_{\lambda/4}$ son respectivamente el número de onda la impedancia mecánica y el grosor de la capa de adaptación de impedancia respectivamente.



Transductor

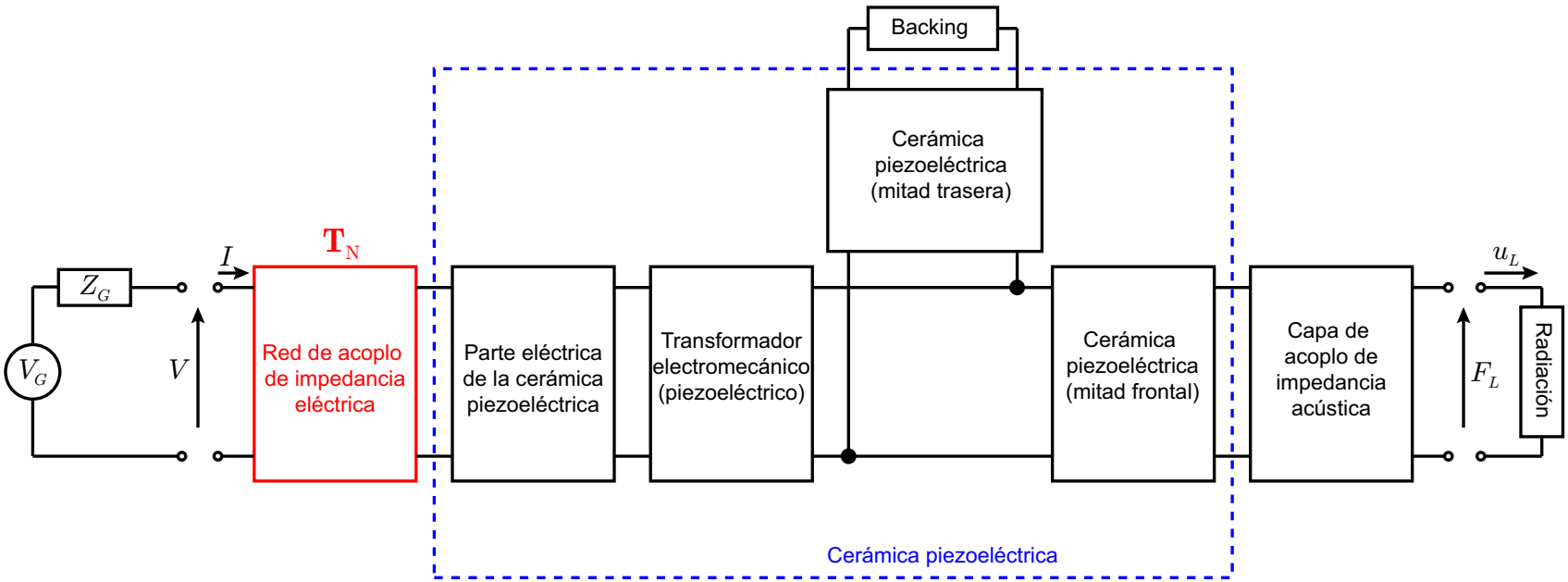
Elementos eléctricos

Matriz de propagación eléctrica:

$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = \mathbf{T}_n \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix}, \tag{57}$$

- **Elementos en serie**: Componentes electrónicos con una impedancia $Z_\mathbf{s}$

$$\mathbf{T_s} = \begin{bmatrix} 1 & Z_\mathbf{s} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{58}$$



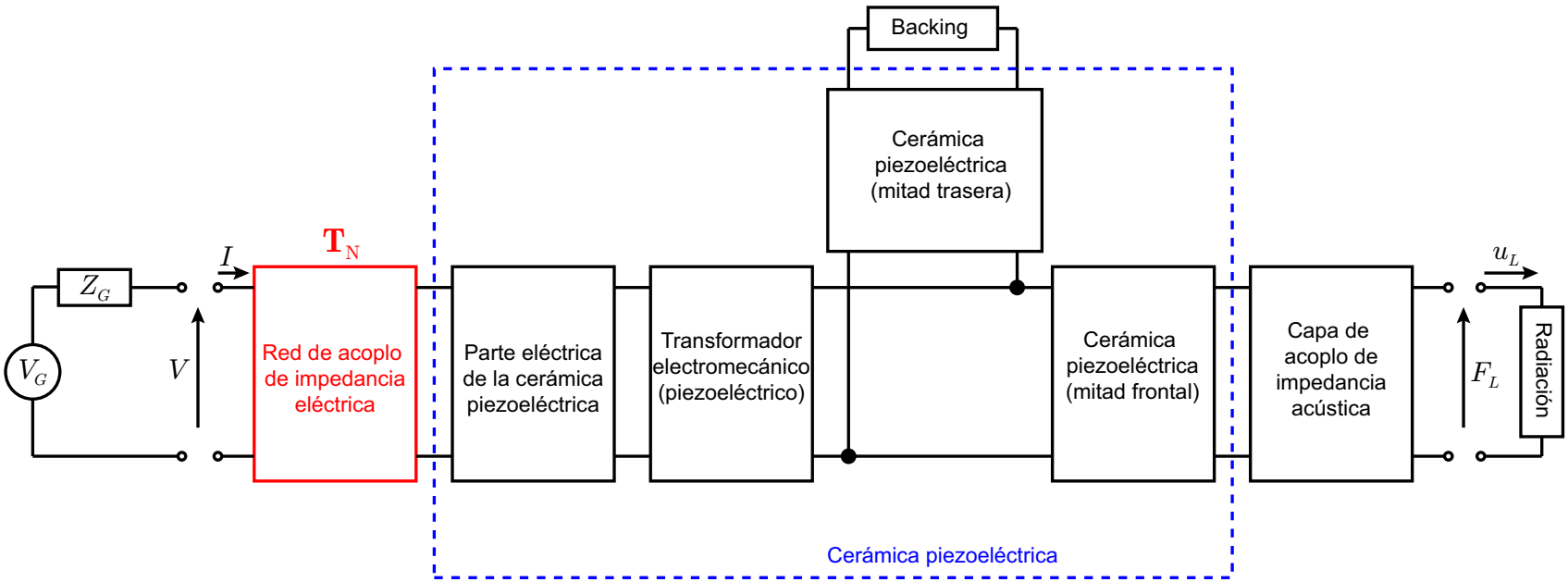
Transductor

Elementos eléctricos
Matriz de propagación eléctrica:

$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = \mathbf{T}_n \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix}, \tag{57}$$

- **Elementos en paralelo**: Componentes electrónicos con una impedancia $Z_\mathbf{s}$

$$\mathbf{T_s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_\mathbf{s} & 1 \end{bmatrix}. \tag{58}$$



Transductor

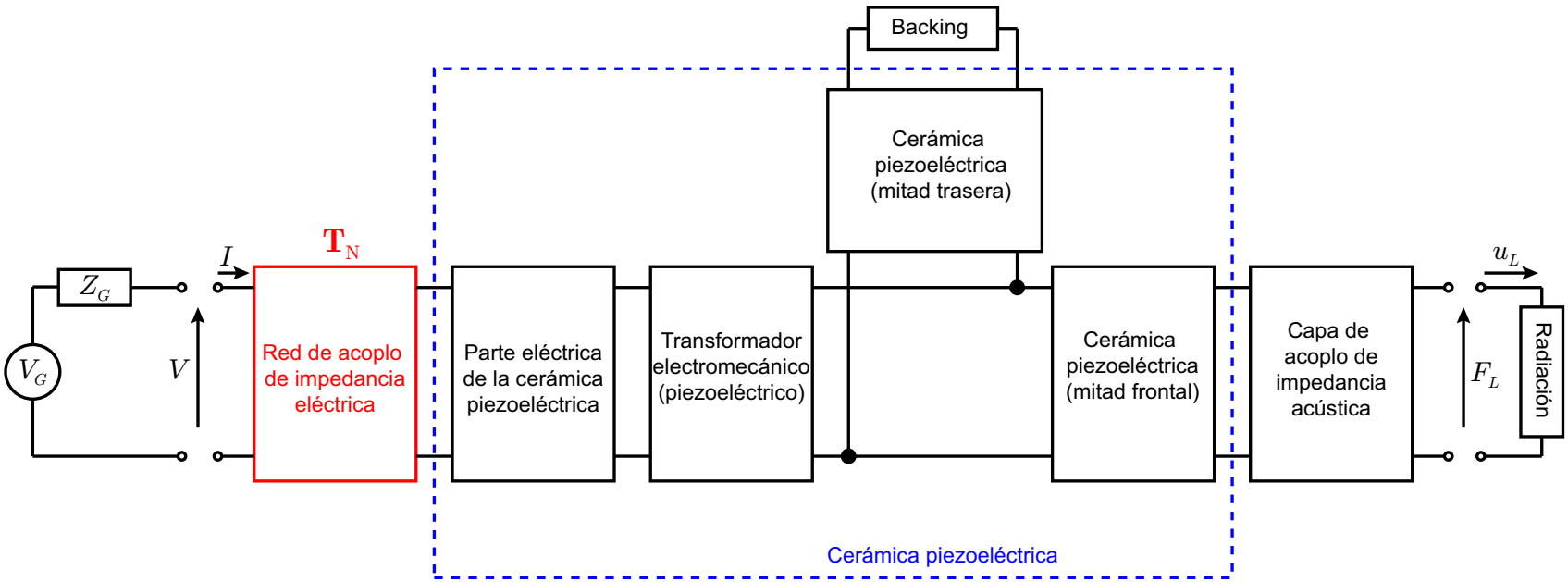
Elementos eléctricos

Matriz de propagación eléctrica:

$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = \mathbf{T}_n \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix}, \tag{57}$$

- **Transformadores**: factor de transformación ϕ

$$\mathbf{T}_\phi = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & 1/\phi \end{bmatrix}, \tag{58}$$



Resultados

Matriz total

$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} F_L \\ u_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_L \\ u_L \end{bmatrix}, \tag{59}$$

Impedancia eléctrica:
La impedancia eléctrica es el ratio entre tensión e intensidad

$$Z_{in}(\omega) = \frac{V(\omega)}{I(\omega)}, \tag{60}$$

Para calcularlo, debemos conocer la impedancia de radiación

$$Z_L(\omega) = \frac{F_L(\omega)}{u_L(\omega)} \tag{61}$$

Suponemos que $Z_L = \rho_F c_F$, lo que es cierto para discos grandes $k_F R \gg 1$.

$$Z_{in}(\omega) = \frac{T_{11} Z_L + T_{12}}{T_{21} Z_L + T_{22}}. \tag{62}$$

Resultados

Matriz total

$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} F_L \\ u_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_L \\ u_L \end{bmatrix}, \tag{63}$$

Función de transferencia en emisión

El generador presenta una cierta impedancia de salida Z_G. Así, obtenemos

$$\frac{F_L}{V} = \frac{Z_L}{(T_{11}Z_L + T_{12}) + Z_G\,(T_{21}Z_L + T_{22})}. \tag{64}$$

Función de transferencia en recepción

El sistema ultrasónico es reciproco, por lo que puede ser empleado empleando el efecto piezoelectrico inverso

$$\frac{V}{F_L} = \frac{2Z_R}{(T_{11}Z_L + T_{12}) + Z_R\,(T_{21}Z_L + T_{22})}, \tag{65}$$

dónde V es el voltaje en recepción sobre una impedancia Z_R situada en el puerto eléctrico del sistema.

Resultados

Respuesta del transductor a una excitación
Es posible obtener la respuesta al impulso del sistema $h(t)$. Ello se consigue simplemente realizando la transformada de Fourier inversa de la función de transferencia como

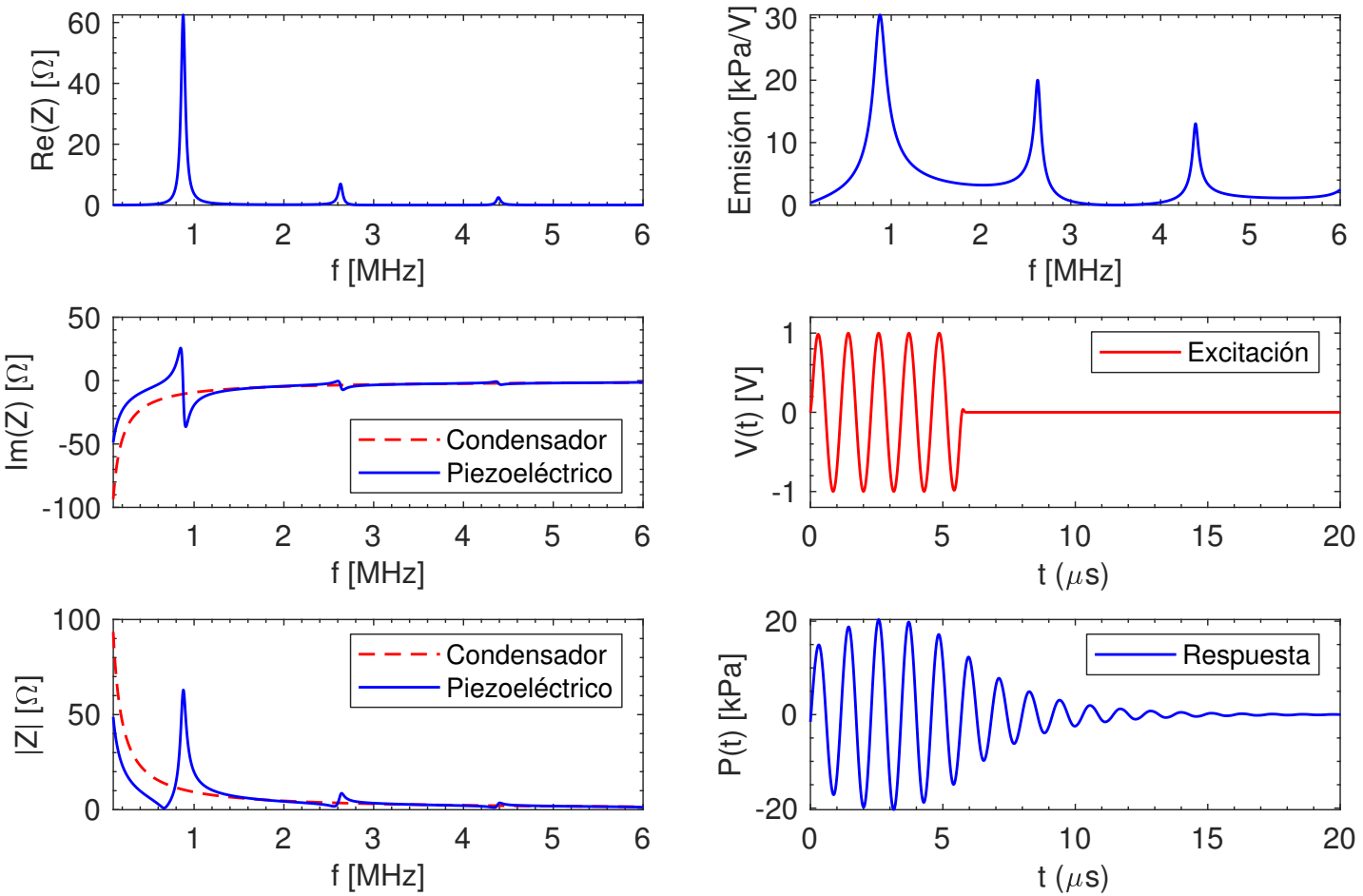
$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{F_L(\omega)}{V(\omega)}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_L(\omega)}{V(\omega)} e^{i2\pi t} d\omega. \tag{66}$$

Esta operación comúnmente se lleva a cabo numéricamente empleando la transformada de Fourier rápida (FFT).
Además, podemos convolucionar la respuesta del sistema con una excitación,

$$p(t) = V(t) * h(t) = \int_0^t V(t)h(t-t')dt'. \tag{67}$$

Resultados

Ejemplo de respuesta: Vibración de una cerámica PZT26, radiando en agua.



$L = 1$ mm, $R = 30$ mm, $\varepsilon^T_{33,r} = 1300$, $s^E_{33} = 20e-12$ Pa^{-1}, $d_{33} = 330e-12$ $\rho_p = 7700$ kg/m^3.

Conclusiones

1. Se ha obtenido un **modelo analítico**:
   - Vibración de la cerámica piezoeléctrica
   - Vibración del transductor piezoeléctrico
2. Se han desarrollado **conceptos** de:
   - Elasticidad
   - Electromagnetismo
   - Acústica
3. **Modelización**:
   - Sistemas ecuaciones acopladas en derivadas parciales.
   - Álgebra lineal: producto matricial, cálculo de determinante, cálculo tensorial.
   - Transformadas de Fourier empleado resultados numéricos

Modelización de cerámicas y transductores piezoeléctricos vibrando en espesor mediante matrices de transferencia

Noé Jiménez[1], Francisco Camarena[1,2]

[1] Instituto de Instrumentación para Imagen Molecular (i3M), CSIC - UPV (Spain)
[2] Departamento de Física Aplicada, Universitat Politècnica de València (Spain)

VI Jornadas de Modelización Matemática, 25 Mayo 2018, Valencia (Spain)