SIMULACIÓN DE TEJIDOS VEGETALES MEDIANTE DIFERENCIAS FINITAS

Noé Jiménez
Tesis de máster

Directores:
Francisco Camarena Femenia
Javier Redondo Pastor



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Máster Oficial en Ingeniería Acústica,

Escuela Politécnica Superior de Gandía, 2009

CONTENIDOS

1	**Introducción**	**1**
2	**Cítricos**	**3**
3	**Caracterización ultrasónica de tejidos vegetales**	**11**
4	**Modelos de propagación en medios heterogéneos**	**17**
5	**Discretización de los modelos en diferencias finitas**	**27**
6	**Condiciones de contorno absorbentes**	**41**
7	**Modelo numérico**	**51**
8	**Resultados**	**55**
9	**Conclusiones**	**61**

CONTENIDOS

Agradecimientos ix

Lista de Símbolos xi

1 Introducción 1

2 Cítricos 3

2.1 Citricultura: la situación actual 3
2.2 Morfología del fruto 4
2.3 Métodos para el control de la calidad postcosecha de naranjas 5
2.3.1 Fisiología postcosecha 5

3 Caracterización ultrasónica de tejidos vegetales 11

3.1 Dispositivos ultrasónicos para la caracterización de frutas y hortalizas 11
3.2 Métodos numéricos para la caracterización de frutas y hortalizas 15

4 Modelos de propagación en medios heterogéneos 17

4.1 Modelo lineal de primer orden para fluidos 17

4.2 Modelo lineal de primer orden para sólidos 18
4.3 Modelos de propagación en medios porosos 22
4.3.1 Modelo propuesto por Zwikker-Konsten 22
4.3.2 Modelo propuesto por Biot 23
4.3.3 Modelo propuesto por Wilson et al. 24
4.4 Modelo de atenuación en sólidos 24
4.4.1 Primera aproximación 24
4.4.2 Perdidas viscoelásticas 25

5 Discretización de los modelos en diferencias finitas 27

5.1 Aproximación de la derivada mediante diferencias finitas 27
5.1.1 Diferencias finitas centradas de segundo orden 28
5.1.2 Diferencias finitas centradas de cuarto orden 29
5.1.3 Cálculo de la segunda derivada (segundo orden) 30
5.2 Introducción al método FDTD 30
5.2.1 Estructura de un algoritmo FDTD 31
5.2.2 Notación 32
5.3 Aplicación del método FDTD al modelo de acústica de fluidos 33
5.3.1 2D Fluidos, Sistema de coordenadas cartesiano 33
5.3.2 Estabilidad y dispersión 34
5.4 Aplicación del método FDTD al modelo de sólidos 35
5.4.1 2D Sólidos, Sistema de coordenadas cartesiano 35
5.4.2 Estabilidad y dispersión 38
5.5 Aplicación del método FDTD al modelo de sólidos con pérdidas 38

6 Condiciones de contorno absorbentes 41

6.1 ABC's, Metodología analítica 42
6.2 PML, Perfectly Matched Layers 43
6.2.1 Implementación de las PML para el modelo de fluidos 43
6.2.2 Implementación de las PML para el modelo de sólidos 46
6.2.3 Implementación de las PML para el modelo de sólidos con pérdidas 49
6.2.4 Implementación de las PML en sistemas de coordenadas curvilíneos 49

7 Modelo numérico 51

7.1 Simulación con módulos de elasticidad estáticos 51
7.2 Simulación con módulos de elasticidad dinámicos 52

7.3 Señal de excitación 53
7.4 Coste computacional 53

8 Resultados 55

9 Conclusiones 61

A Implementación del método FDTD en fluidos 63

A.1 Sistema de coordenadas cartesianas 3D 63
A.2 Sistema de coordenadas cartesianas polares 66
A.3 Sistema de coordenadas cilíndricas 68
A.4 Sistema de coordenadas esféricas 71

B Implementación del método FDTD en sólidos 75

B.1 Sistema de coordenadas cartesianas 75
B.2 Sistema de coordenadas polares 81
B.3 Sistema de coordenadas cilíndricas 84
B.4 Sistema de coordenadas esféricas 89

C Publicación: Ultrasonic evaluation of the hydration degree of the orange peel 97

C.1 Introduction 98
C.2 Experimental set-up and measurement procedure 100
C.3 Numerical simulation 101
C.4 Results 104
C.4.1 Experimental studies 104
C.4.2 Numerical studies 106
C.4.3 Relation between the dehydration status and the elastic parameters 109
C.5 Discussion 110
C.6 Conclusion 111

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido subvencionado por el Programa de Apoyo a la Investigación y Desarrollo (PAID-06-08) de la Universidad Politécnica de Valencia.

Personalmente quiero dedicar este trabajo a Javier por su incondicional apoyo, así como a Paco y Rubén; gracias por esta oportunidad. También quiero dedicar este trabajo a Mariajo y la I promoción del máster de ingeniería acústica de la EPSG que han sido capaces de soportarme durante este último inolvidable año.

N. J.

SÍMBOLOS

$\mathbf{v}$	Vector velocidad de partícula
ε	Deformación
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de esfuerzos
p	Campo de presión
ρ	Densidad
$\boldsymbol{c}$	Tensor de coeficientes elásticos
λ	Primer parámetro de Lamé
μ	Segundo parámetro de Lamé
κ	Modulo de Bulk
E	Modulo de Young
ν	Coeficiente de Poisson
c_p	Velocidad de propagación de ondas longitudinales
c_s	Velocidad de propagación de ondas transversales
c_r	Velocidad de propagación de ondas Rayleigh
η_p	Coeficiente de resistencia longitudinal
η_s	Coeficiente de resistencia transversal

Noé Jiménez, © 2009 Universitat Politècnica de València

f	Frecuencia
ω	Frecuencia angular
λ	Longitud de onda
k'	Número de onda complejo
r	Coordenada radial
θ	Coordenada de angulo de azimut
φ	Coordenada de angulo de elevación
N_λ	Numero de elementos por longitud de onda
CFL	Numero de Courant-Friedrich-Levy
Δt	Paso temporal
Δr	Paso radial
$\Delta\theta$	Paso del ángulo de azimut
$\Delta\varphi$	Paso del ángulo de elevación
$\alpha_{\max}$	Factor de escala de la PML
$\Omega_{\max}$	Factor de atenuación de la PML
Dh	Deshidratación
R	Resistencia al flujo
k_s	Constante de estructura
ϕ	Porosidad
β_∞	Compresibilidad compleja
V_∞	Volumen complejo a alta frecuencia
τ_e	Constante de relajación de los procesos de entropía
τ_v	Constante de relajación de los procesos de vorticidad
η	Viscosidad
N_λ	Numero de elementos por longitud de onda
CFL	Numero de Courant-Friedrich-Levy
Δt	Paso temporal
Δx	Paso espacial dirección x
Δy	Paso espacial dirección y
Δz	Paso espacial dirección z
Δr	Paso radial
$\Delta\theta$	Paso del ángulo de azimut
$\Delta\varphi$	Paso del ángulo de elevación
$\alpha_{\max}$	Factor de escala de la PML
$\Omega_{\max}$	Factor de atenuación de la PML
Dh	Deshidratación

RESUMEN

En los últimos años se han desarrollado múltiples técnicas para la caracterización ultrasónica de productos hortofrutícolas en procesos postcosecha. Todas ellas han detectado parámetros acústicos macroscópicos comunes: una baja velocidad de propagación y una gran absorción. El presente trabajo presenta un modelo numérico para la simulación acústica de tejidos vegetales en dominio temporal. Dicho modelo describe correctamente las especiales características de propagación de las ondas detectadas experimentalmente en estos tejidos biológicos, poniendo de relieve la necesidad de utilizar características elásticas dependientes de la frecuencia, en concreto el módulo de Young dinámico. Por otro lado, el trabajo recopila diferentes métodos numéricos basados en diferencias finitas en dominio temporal para desarrollar simulaciones acústicas en medios heterogéneos, describiendo su implementación en los sistemas de coordenadas cartesiano, polar, cilíndrico y esférico.

Abstract

In recent years many techniques have been developed for ultrasonic characterization of fruit and vegetables in postharvest processes. All have found common macroscopic acoustic parameters: a slow propagation speed and a large absorption. This paper presents a numerical model for simulating acoustic plant tissues in time domain. This model correctly describes the special characteristics of wave propagation experimentally detected in these biological tissues, emphasizing the need for elastic frequency dependent characteristics: the dynamic Young's modulus. In addition, work is a compilation of different numerical methods for acoustic simulations in heterogeneous media, describing its implementation in cartesian, polar, cylindrical and spherical coordinate systems.

NOÉ JIMÉNEZ

email: nojigon@upv.es. Fecha de entrega: 04-12-2009

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Hasta el momento, la propagación de ondas acústicas en tejidos vegetales ha sido estudiada mediante técnicas experimentales. Así, tan solo conocemos ciertas características macroscópicas de los fenómenos existentes en la dinámica de estos medios heterogéneos a frecuencias ultrasónicas como son la velocidad de propagación y la atenuación de la onda al atravesar un cierto tejido. La solución analítica de estos problemas de propagación en medios heterogéneos es siempre la opción más precisa, pero solo es posible para geometrías sencillas que en la mayoría de casos se alejan de la realidad. Así, la alternativa es optar por una solución aproximada del problema obtenida mediante métodos numéricos.

En este trabajo se pretende diseñar un modelo numérico para la propagación de ondas elásticas en tejidos vegetales que se ajuste a las características de propagación medidas experimentalmente. Así, este modelo puede revelar parte de la naturaleza de los fenómenos acústicos en dichos medios biológicos, ayudando a la comprensión de sus características. Ambos aspectos son necesarios para el desarrollo de nuevas técnicas acústicas de caracterización de medios biológicos en campos como la imagen médica, ensayos no destructivos en ingeniería, procesado de alimentos, etc.

Como último objetivo, este trabajo pretende también hacer una recopilación de los modelos más comunes para la propagación de ondas acústicas y elásticas en

Noé Jiménez, © 2009 Universitat Politècnica de València

medios heterogéneos y su implementación en diferencias finitas en dominio de tiempos. En dicha recopilación se desarrollan los modelos numéricos en coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas con motivo de servir de referencia a trabajos posteriores. Los métodos numéricos implementados se basan en diferencias finitas en dominio temporal (FDTD). Dichas aplicaciones numéricas serán implementadas para distintos modelos físicos de medios heterogéneos: En medios fluidos, sólidos elásticos, sólidos con pérdidas y descriptivamente en sólidos viscoelásticos y medios porosos.

Capítulo 2

CÍTRICOS

2.1 Citricultura: la situación actual

Los cítricos son una parte indispensable de la dieta humana, así como una importante fuente de fibra, vitaminas, minerales y muchos otros componentes importantes para la salud humana (Hui, 2006). Se cultivan por sus frutos, de agradable sabor y sin semillas, que se consumen preferentemente en fresco, aunque también se comercializan en forma de zumo (concentrado, fresco, pasteurizado, etc), mermeladas o jaleas. Así, el cultivo de cítricos tiene un gran impacto comercial, agrícola, económico y social a nivel mundial. Actualmente la citricultura representa la mayor producción agrícola de frutas en cuanto a toneladas de producción (FAO/FAOSTAT, 2009), (Fig. 2.1). El cultivo de cítricos mundial está liderado por Brasil, aunque en los últimos años China se presenta como un gran competidor. Después de Estados Unidos, España ocupa el 4º puesto con una producción en 2007 de 5.1 millones de de toneladas de cítricos (Fig. 2.2). El 51% de la producción total en nuestro país es de naranjas, el 38% de clementinas y el 10% de limones.

La mayor parte de la producción de cítricos se cultiva en la comunidad valenciana, teniendo una indicación geográfica protegida denominada cítricos valencianos (IGP, 2009). En dicha denominación se incluyen las variedades más cultivadas así como

Noé Jiménez, © 2009 Universitat Politècnica de València

otras de especial interés tanto por factores históricos, biológicos y culturales. Las tres variedades más cultivadas en 2008 en la comunidad valenciana son las naranjas Navelina y Lane Late y la clementina Clemenules. Además, se cultivan muchas otras variedades de cítricos entre las que podemos destacar Valencia Late, Washington Navel, Orogrande, Nova, Marisol, Ortanique, Clemenpons, Hernandina, Salustiana y otras 24 variedades con menos volumen de producción (IGP, 2009).

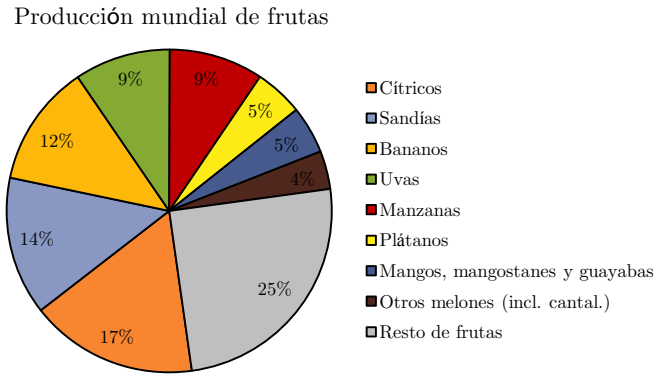


Figura 2.1: Comparativa de la producción mundial de frutas, (FAO/FAOSTAT, 2009)

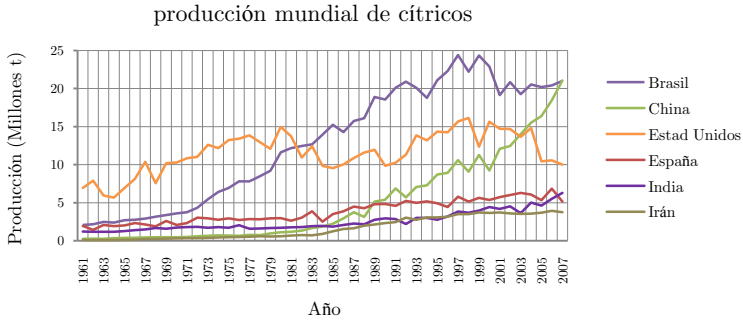


Figura 2.2: Principales países productores de cítricos, (FAO/FAOSTAT, 2009)

2.2 Morfología del fruto

El análisis de la estructura del fruto es necesario para conocer la distribución de las diferentes zonas heterogéneas en la naranja. Describiremos así las propiedades físicas de los tejidos que la componen como densidad y elasticidad, además de otros parámetros que describen la propagación de ondas mecánicas en dichas frutas. Así,

centraremos el estudio de la anatomía y morfología del fruto en la especie vegetal *Citrus Sinensis (L.) Osb.* del género *Citrus*, familia *Rutaceae*, o comúnmente conocida como naranjo dulce.

El fruto del la naranja dulce es una baya que toma el nombre de hesperidio (Fig. 2.3). En él se distinguen varias zonas claramente diferenciadas por sus funciones biológicas y por su naturaleza física. En la parte más exterior del fruto se encuentra la corteza exterior (exocarpo) llamada flavedo. Dicha capa presenta una estructura sólida con un alto contenido en agua, es del orden de unos pocos milímetros en el fruto maduro y toma el color naranja característico del fruto. Está compuesta por una epidermis de unas pocas filas de células y una hipodermis en cuyo interior existen multitud de vesículas de aceite de unos 0,5 mm de diámetro (Fig. 2.3). Hacia el interior se encuentra otra capa claramente diferenciada, el mesocarpo, que en la naranja toma el nombre de albedo. Es una estructura sólida porosa de color blanco del orden de unos 5 mm, en cuyo interior se encuentran gases debidos a la respiración del fruto (Fig. 2.3). La porosidad del flavedo aumenta hacia el interior de la fruta. El endocarpo está compuesto de la pulpa y presenta tricomas con jugo. Dichos gajos se encuentran unidos por una columna central de características mecánicas similares a las del albedo (Fig. 2.3).

Como podemos apreciar, el fruto de la naranja está compuesto por tejidos vegetales de estructura compleja, constituidos principalmente por 80 a 85% de agua y aceites en glándulas localizadas, existen espacios intercelulares en el que se confinan gases, La composición total de sólidos es de un 12 a 15%, así como de entre un 5 a 7% de ácido cítrico dependiendo de la especie.

2.3 Métodos para el control de la calidad postcosecha de naranjas

2.3.1 Fisiología postcosecha

Para la descripción de las técnicas de control de calidad postcosecha de productos vegetales es necesario caracterizar la fisiología postcosecha de los frutos. La fisiología describe los procesos que desarrollan los vegetales después de ser separados de la planta, puesto que estos siguen aún vivos después de ser cosechados. La fruta cosechada continúa respirando, madurando y en algunos casos iniciando procesos de senescencia (sobremadurez), lo que implica cambios fisiológicos, bioquímicos y estructurales que son específicos de cada especie. Asimismo, el producto cosechado está constantemente expuesto a la pérdida de agua debido a la transpiración y a otros fenómenos fisiológicos y ambientales.

Podemos clasificar en función de indicadores físico-químicos los cambios que sufre el fruto como:

- **Firmeza:** cambios en el metabolismo de la pared celular, degradación.
- **Color:** síntesis de carotenoides y otros pigmentos, degradación de clorofilas.
- **Sabor:** aumento de azucares/hidrólisis de almidón, disminución de ácidos.

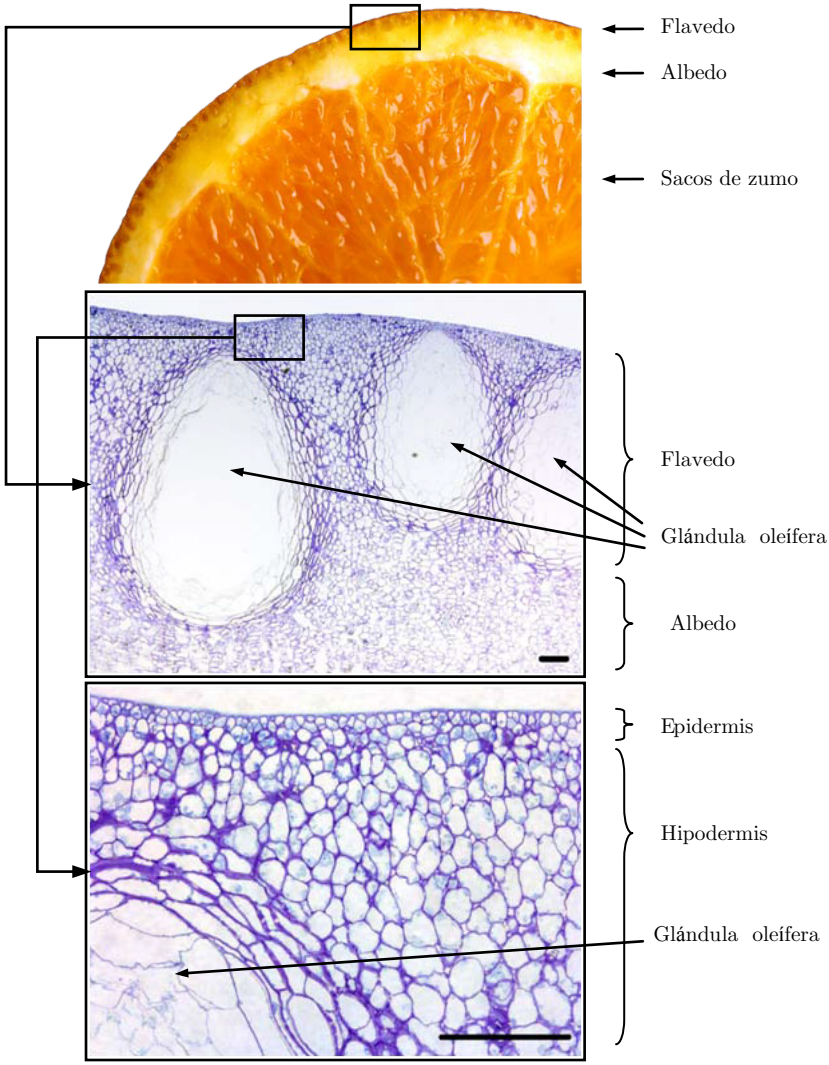


Figura 2.3: Anatomía de la corteza de la naranja, variedad Navelina. Fotografías tomadas mediante histología, barras 150 μm (Katina, 2007).

- **Aroma:** Síntesis de compuestos volátiles, metabolitos secundarios.
- **Respiración** y tasa de producción de etileno.

Tecnología postcosecha: control de calidad La tecnología postcosecha trata de mantener la calidad del producto vegetal durante todo el proceso de comercialización ya que dichos productos biológicos son perecederos. Así, la tecnología postcosecha tratará por un lado de monitorizar los procesos fisiológicos existentes en el fruto, y por otro de buscar tratamiento a los problemas detectados como pueden ser el prolongar el tiempo de conservación, ralentizar el proceso de maduración postcosecha, inhibir el crecimiento de agentes patógenos, etc.

Existen múltiples técnicas para la monitorización de la calidad de productos hortofrutícolas y cada una de ellas se basa en la medición de un parámetro físico-químico en busca de encontrar una correlación con algún índice fisiológico como los mostrados anteriormente. Los índices más comunes medidos en la tecnología postcosecha de frutas son:

a) Índices físicos de calidad postcosecha

- **Tamaño y volumen:** El calibre de la naranja es el índice más simple de todos por su facilidad de medición en los procesos postcosecha, se tienen en cuenta los diámetros longitudinales y transversales que varías en función de la variedad. Aún es tomado como criterio de calidad, el tamaño de la fruta no es un índice objetivo del estado del fruto ya que guarda una escasa relación con la madurez de la fruta, dependiendo más del estado nutricional de la planta (Ladanyia and Ladaniya, 2010).
- **Masa:** La medida de la masa se mide a intervalos regulares después de la cosecha y es útil sobre todo para estimar la pérdida de humedad de ésta durante el almacenamiento, siendo un indicador del estado del fruto. La masa de la naranja y sus variaciones guardan una relación clara con el porcentaje de zumo (Ladanyia and Ladaniya, 2010).
- **Porcentaje de zumo:** A partir de la medida del contenido de zumo al exprimir la fruta se puede obtener el porcentaje de zumo como el cociente entre éste y la masa total de la fruta. El porcentaje disminuye con el tiempo postcosecha y dichas pérdidas están altamente relacionadas con la pérdida de humedad.
- **Espesor de la corteza:** Se suele medir pelando el fruto, no cortándolo. Por supuesto varía en función de la variedad pero es un buen indicador del estado de hidratación del fruto.
- **Firmeza:** La firmeza es un importante índice del estado fisiológico del fruto, además de guardar una estrecha relación con la calidad del producto para el consumo. Se puede medir la resistencia a la penetración, a la compresión, a impacto y por medios acústicos.
- **Penetrometría:** Cuando el fruto se vuelve blando, la firmeza de este disminuye, por lo que podemos medir la firmeza por medio de la resistencia a la penetración

de la piel. El ensayo más empleado es el test de firmeza Magness-Taylor. Así, podemos medir la fuerza necesaria para romper la epidermis y atravesar la glándula de aceite de la corteza de las naranjas. Cuando usamos penetrometría para medir la firmeza necesitamos conocer el tipo de instrumento, las dimensiones y geometría de la sonda, la profundidad de penetración y la tasa o velocidad de carga (Ladanyia and Ladaniya, 2010).

- **Ensayos esfuerzo-deformación:** La limitación de la penetrometría viene cuando existe en el fruto una rápida pérdida de humedad debido a condiciones atmosféricas calurosas y secas. Si esto ocurre la piel se seca rápido y se vuelve mucho más firme, por lo que el test de penetración puede ofrecer resultados erróneos, ya que la firmeza disminuye con el tiempo (Ladanyia and Ladaniya, 2010). Por ello Abbott (1999) sugirió medir la firmeza por medio de test de compresión. Actualmente existe una recomendación internacional seguida por la mayoría de ensayos recogidos en la bibliografía para productos horticultoras de forma convexa (Standard et al., 1998). Así, se puede estimar la firmeza de la fruta como la fuerza necesaria para comprimir la fruta una distancia concreta. Así, se sitúa la naranja entre dos placas de metal y sobre una de ellas se carga una fuerza a velocidad constante hasta comprimir unos milímetros la fruta, de manera que la fuerza es proporcional a la firmeza (Singh and Reddy, 2006b). De la misma manera también es común realizar ensayos de elasticidad transversal, de relajación y otros ensayos mecánicos similares a los practicados en sólidos elásticos.

- **Métodos acústicos:** Se puede estimar la firmeza de frutas por medios sónicos en función de la detección de resonancias acústicas en el espectro audible, aunque en el caso de las naranjas estos métodos no han sido todavía aplicados (Olmo et al., 2000). En el caso de usar frecuencias ultrasónicas, se ha propuesto la medida de la velocidad de propagación y la atenuación de la onda en la corteza de la fruta como indicador de la firmeza de la naranja, aunque este método está en desarrollo (Camarena et al., 2007).

- **Colorimetría:** Se realiza por medio de dispositivos ópticos para la medida de color. Los pigmentos de color verde de la naranja (clorofila) van desapareciendo en el proceso de maduración, emergiendo otros denominados cartenoides que le dan al fruto su color naranja característico (Olmo et al., 2000). Ya que la naranja es un fruto no climatérico (solo madura en el árbol), la producción de



Figura 2.4: Penetrómetro común empleado para el test Magness-Taylor.



Figura 2.5: Colorímetro portable, medidor de brillo (glossmeter TRI gloss BYK) y cromatógrafo de gases.

cartenoides se puede acelerar aplicando desverdización en una atmósfera modificada con etileno sin modificar los procesos de maduración interna del fruto (Jiménez-Cuesta et al., 1982). También para determinados procesos se realiza colorimetría de los sacos de zumo. Existen en el mercado desde sencillos colorímetros portables hasta instrumentos científicos de alta precisión.

- **Brillo:** La piel de la naranja se distingue por poseer un brillo característico debido a su corteza rugada. Existen instrumentos ópticos para medir esta índice de calidad mediante la reflexión de la luz incidente (Ladanyia and Ladaniya, 2010).

b) Índices químicos de calidad postcosecha

- **Acidez total titulable:** Se determina mediante medidores de pH. La acidez de la naranja se debe fundamentalmente a los ácidos cítricos, aunque también hay pueden existir cantidades ínfimas de otros ácidos. El contenido de ácido es alto cuando comienza la maduración de los frutos y decrece a medida que ésta avanza (Ladanyia and Ladaniya, 2010).

- **Sólidos solubles totales (SST):** En los frutos de los cítricos, entre el 75 y el 85% del total de sólidos solubles son azúcares, además de acido cítrico y sus sales, compuestos de nitrógeno y demás sustancias solubles. El total de SST se mide en ºBrix y normalmente está entre 5 y 15 ºBrix. Los SST se miden por medio de un refractómetro que se basa en el principio de la refracción de la luz para la medición de concentraciones de sustancias en soluciones acuosas. Así, el ángulo de refracción muestra la concentración de los sólidos disueltos en él líquido (Ladanyia and Ladaniya, 2010).

- **Relación SST/Acidez:** Ya que el sabor de la naranja viene determinado por la relación de SST con la acidez más que por la magnitud de cada uno de ellos, a menudo se usa este cociente como índice de calidad postcosecha. Así, se considera óptima una relación de 10:1 SST/acidez. Este índice se usa también como medida de la madurez en la fase de cosecha.

c) Índices fisiológicos de calidad postcosecha

- **Tasa de respiración:** La propia respiración del fruto está relacionada con los procesos metabólicos de este y guarda una estrecha relación con el tiempo de vida útil del fruto. Se puede mediante analizadores de infrarrojos en función de los mg de CO2 producidos por hora y por kg de fruta y es importante su control sobre todo en procesos como atmósferas modificadas (Ladanyia and Ladaniya, 2010).

- **Tasa de producción de etileno:** Todas las frutas producen esta hormona vegetal. Los cítricos son frutos no climatéricos y por tanto producen poca cantidad de etileno en la maduración (<0.1μL/kg·h a 20°C) (Ladanyia and Ladaniya, 2010). Aún así, pueden ser medido con mucha precisión mediante cromatografía de gases o con menos pero con una mayor aceptación comercial por medio de detectores electroquímicos o simplemente reactores químicos portables.

d) Otros ensayos de calidad

- Se pueden analizar los aspectos internos de los frutos mediante técnicas electromagnéticas, desde el espectro visible (colorimetría común) hasta rayos-X y tomografía (Bellon, 1993), así como por resonancia magnética (Chen et al., 1989) para diseñar sistemas de detección y clasificación de naranjas.

Capítulo 3

CARACTERIZACIÓN ULTRASÓNICA DE TEJIDOS VEGETALES

Como hemos recapitulado en la sección 2.3.1, son numerosos los métodos de monitorización de calidad en frutas y hortalizas, pero la mayoría de ellos precisan de un ensayo destructivo, por lo que no pueden ser aplicados a todas las frutas y hortalizas de una cadena de producción. Tan sólo se aplica comercialmente la selección por tamaño, peso y la colorimetría como ensayos no destructivos. Ante esta necesidad, en los últimos años se vienen desarrollando técnicas acústicas que hacen uso de ondas elásticas en los tejidos vegetales en las que se buscan correlaciones entre un parámetro acústico medido experimentalmente y un índice fisiológico que ofrezca información acerca del estado del fruto.

3.1 Dispositivos ultrasónicos para la caracterización de frutas y hortalizas

Existen múltiples publicaciones que describen ensayos para la generación y detección de ondas ultrasónicas en tejidos vegetales como los propuestos para aguacate y mango (Mizrach, 2000); para manzanas (Bechar et al., 2005) y (Kim et al., 2006); para patatas (Cheng and Haugh, 1994; Solos, 1998); en zanahorias (Nielsen and

Noé Jiménez, © 2009 Universitat Politècnica de València

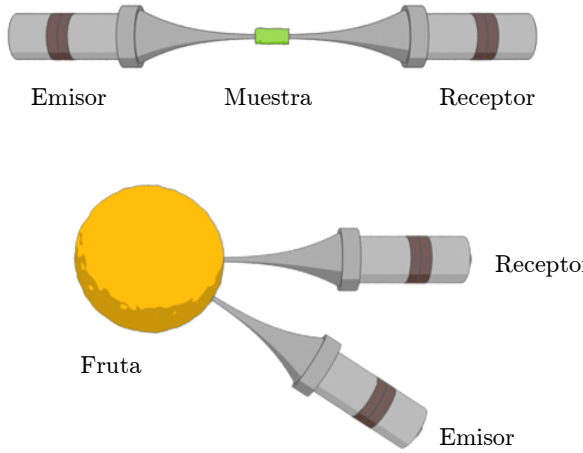


Figura 3.1: (Arriba) configuración de ensayo destructivo, (abajo) ensayo no destructivo.

Martens, 1997) o en naranjas (Camarena and Martinez-Mora, 2006; Camarena et al., 2007). Debido a las especiales características de propagación todos ellos miden tan solo en una banda de frecuencias muy estrecha y no muy elevada, de 37 a 100 kHz. Existen intentos de medir en frecuencias del orden de 1 MHz, pero debido a la alta atenuación es imposible diseñar una técnica comercialmente aceptable (Mizrach, 2008). Los transductores son por lo general tipo sándwich con focalizador mecánico para poder transferir una mayor potencia al medio vegetal. Así, existen dos configuraciones básicas de los métodos ultrasónicos en tejidos vegetales: Uno es destructivo, y la propagación de la onda se produce a través de una muestra colocada entre los transductores. En la configuración de ensayo no destructivo, los transductores se colocan en la superficie de la fruta sin dañarla (Fig. 3.1). Así, variando la separación entre transductores se pueden medir parámetros de la señal recibida para posteriormente calcular propiedades acústicas del medio. Debido al estrecho ancho de banda de los transductores y de la baja amplitud de la señal detectada únicamente se miden parámetros como el tiempo de vuelo y la amplitud, por lo que las propiedades del medio calculadas son la velocidad de propagación y la atenuación de la onda.

A nivel global, los resultados de dichos ensayos aportan dos conclusiones importantes sobre la propagación de ondas acústicas en medios vegetales. La primera son las bajas velocidades de propagación detectadas en estos tejidos. Estas están por debajo de los 200 m/s para las medidas superficiales y de 300 a 700 m/s para las medidas longitudinales. La segunda conclusión es la alta atenuación de la onda al atravesar estos medios vegetales, que varía entre 1 y 7 dB/mm en función del tipo de tejido (Mizrach, 2008).

En el caso concreto de las naranjas, los resultados del ensayo no destructivo se muestran en la Fig. 3.2. Las velocidades de propagación no superan en ningún mo-

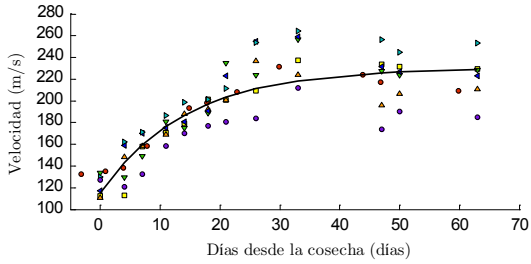


Figura 3.2: Evolución de la velocidad de propagación en función el tiempo postcosecha transcurrido para la variedad de naranja Navel. Se tomaron 7 muestras de cada variedad. Cada color indica la evolución de una de las muestras.

mento los 280 m/s, aumentando ésta en función del tiempo postcosecha transcurrido desde 120 hasta valores finales de 260 m/s.

Por otro lado, son numerosos los ensayos mecánicos sobre frutas y hortalizas para extraer características elásticas de los tejidos. El objetivo suele ser principalmente para aplicaciones de transporte y almacenaje del producto, aunque también las hay para extraer relaciones entre las características elásticas de los vegetales y parámetros fisiológicos y de calidad como la firmeza, madurez, SST, acidez, etc. Estos experimentos realizan ensayos de tracción, compresión, torsión, etc. similar a los realizados sobre sólidos elásticos, en los que se le aplica una fuerza al tejido con una velocidad constante, nunca en régimen oscilatorio y menos a frecuencias ultrasónicas. Como resultado de dichos ensayos mecánicos se suele obtener la función esfuerzo-deformación del material biológico en cuestión, a partir de la cual se extraen parámetros que describen la elasticidad del material como módulos de Young o módulos de Poisson. Presentamos a continuación (Tabla 1) parámetros elásticos no-dinámicos mediados mediante ensayos mecánicos en diversos materiales vegetales así como velocidades de propagación y atenuación de ensayos ultrasónicos.

Sin embargo, es necesario remarcar que dichas funciones esfuerzo-deformación en tejidos vegetales son fuertemente no lineales así como que dichos materiales presentan componentes viscoelásticas. Es por ello que resumir el comportamiento dinámico de los tejidos vegetales mediante un único parámetro medido estáticamente puede no aportar mucha información acerca de cómo vibra este tejido en frecuencias ultrasónicas.

Analizando los ensayos de elasticidad no-dinámicos desde un punto de vista descriptivo podemos comprender parte de la naturaleza del fenómeno. Así, en un experimento de compresión, al aplicar inicialmente una pequeña fuerza de compresión sobre el tejido vegetal este se deforma con mucha facilidad. La fuerza necesaria para continuar deformando el vegetal irá en aumento de manera no lineal, no acorde a la Ley de Hooke (Fig. 3.3). Podemos encontrar una simple explicación observando que inicialmente al deformar el tejido estamos desplazando el aire contenido en este, por lo que la fuerza necesaria para realizar una deformación será mínima. Pero cuando una onda elástica ultrasónica atraviesa el material las partículas de éste vibran respecto de su posición de equilibrio sin desplazarse, por lo que la elasticidad (dinámica) del material a estas frecuencias puede diferir bastante con la elasticidad

Tabla 3.1: Características elásticas no-dinámicas de agua y tejidos vegetales: medidas mediante ensayos mecánicos (Singh and Reddy, 2006a; Baryeh, 2000; Grotte et al., 2002; Jindal, 1985; Bunyaphlanan, 1973), y características acústicas medidas por medio de ensayos ultrasónicas (Mizrach, 2008).

Medio	Densidad ρ (kg/m^3)	Módulo de Young E (MPa)	Módulo de Poisson v	Constante de Lamé λ (MPa)	Módulo de cizalladura μ ó G (MPa)	Velocidad de propagación (m/s)	Atenuación (dB/mm)
Agua 20^o (longitudinal)	1000	-	-	$2.2 \cdot 10^3$	-	1540	0,0058 (40kHz)
Aire 20^o (longitudinal)	1.21	-	-	0.142	-	343	
Aguacate (global)	963	0,48	0,33	0,35	0,32	150 - 400	2,5 - 5,0 (50kHz)
Manzana (interior)	789	1,57	0,34	1,24	1,05	-	1,3 - 2,6 (80 - 100kHz)
Manzana (piel)	-	3,33	0,17	0,72	1,94	98 - 183	1,2 - 1,5 (1 - 5 MHz)
Melón (piel)	1209	5,54	0,30	3,20	3,60	61 - 90	2,6 - 7,1 (50 kHz)
Naranja (interior)	978	0,62	0,45	1,88	0,45	-	-
Naranja (piel)	903	1,57	0,34	1,24	1,05	130 - 240	2,1 - 3,8 (40 kHz)
Patata (interior)	1087	7,14	0,25	2,85	4,46	686,89	0,6791 (100 kHz)
Zanahoria (interior)	1021	6,96	0,30	4,02	4,53	341 - 500	1,02:1,23 (37 - 50 kHz)

(no dinámica) del mismo material medida macroscópicamente mediante estos ensayos.

Por otro lado, las características viscoelásticas de tejidos biológicos blandos (músculos, hígado, etc.) han sido estudiadas más a fondo que las de los vegetales, y en los ensayos sobre aplicaciones ultrasónicas médicas podemos observar una gran similitud con los resultados en tejidos vegetales. En estos tejidos, los módulos de Poisson son del orden de los de los fluidos viscoelásticos $\nu = (0.490, 0.499)$ (Goss et al.,

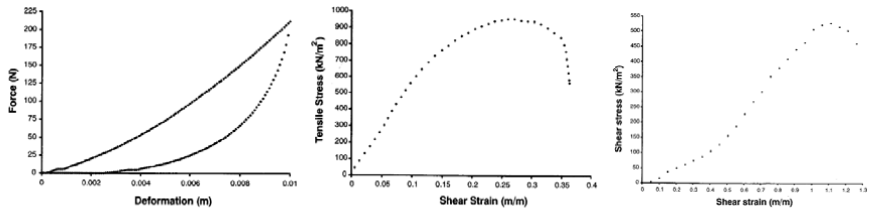


Figura 3.3: Ensayos mecánicos típicos en la corteza de la naranja, variedad "Valencia". Derecha: ensayo de compresión; centro ensayo de punción; izquierda: deformación transversal (Fidelibus et al., 2002).

1978), sin embargo, los módulos de compresibilidad solo difieren de los del agua en un 15%, al igual que las densidades de dichos tejidos (Burlew et al., 1980).

Es por ello que los ensayos mecánicos sobre tejidos biológicos representan una simplificación sólo válida para muy bajas frecuencias, ya que dichos materiales orgánicos heterogéneos presentan características dinámicas mucho más complejas a frecuencias ultrasónicas como comportamientos viscoelásticos, no lineales y anisotrópicos (Manduca et al., 2001).

3.2 Métodos numéricos para la caracterización de frutas y hortalizas

A mediados de los setenta apareció un artículo en el que mediante un estudio analítico de la geometría de frutas esféricas se encontró una relación entre las frecuencias de resonancia debidas a los modos propios de la esfera con los parámetros elásticos de estas (Cooke and Rand, 1973). Esta relación ha sido empleada para determinar la firmeza de frutas mediante métodos acústicos, siempre teniendo en cuenta que las frecuencias de resonancia se encuentran en el espectro audible. Así, varias publicaciones recurren a simulación numérica por elementos finitos para determinar dichas resonancias como lo son las propuestas por Dewulf et al. (1999) y Jancsók et al. (2001) en peras, Nourain et al. (2005) en melones y Kim et al. (2008) en manzanas.

Otros simulaciones también por elementos finitos han intentado describir el comportamiento elástico de tejidos vegetales a escala microscópica, como es el caso de Wu and Pitts (1999) que implementa un modelo de las células de las manzanas para realizar simulaciones de esfuerzo-deformación, o Loodts et al. (2006) en el modelado de la mecánica en células de la epidermis de la cebolla. Posteriormente Mebatsion et al. (2008) recoge múltiples técnicas y ensayos para la modelación de la microestructura de tejidos vegetales. La conclusión más importante de estos estudios es que aunque la onda elástica que atraviesa dichos tejidos posea una longitud de onda muy superior al tamaño de las células de éste, su microestructura afecta en una gran medida a las características de la propagación de la onda (Mebatsion et al., 2008).

Aún así, no se han encontrado publicaciones acerca de simulación numérica de vegetales que empleen métodos de diferencias finitas, ni tampoco alguna simulación con otro método para el caso de la propagación de ondas elásticas a frecuencias ultrasónicas en este tipo de tejidos.

Capítulo 4

MODELOS DE PROPAGACIÓN DE ONDAS ACÚSTICAS EN MEDIOS HETEROGÉNEOS EN DOMINIO TEMPORAL

Debido a las especiales características de los tejidos vegetales se implementarán diferentes modelos para simular así tanto su comportamiento heterogéneo como su comportamiento viscoelástico. En un extremo, conocemos los modelos directamente aplicables a fluidos, como pueden ser el agua o el aire. En el otro extremo, son bien conocidos los modelos para describir el comportamiento de sólidos elásticos. Los fluidos viscosos estudiados por la Reología, están a caballo entre el modelo de los fluidos Newtonianos y los sólidos deformables. En lo que respecta a este trabajo, los tejidos vegetales debido a su compleja estructura poseen características comunes con los fluidos viscosos, aunque también presentan semejanzas al comportamiento dinámico de un sólido elástico. Por otro lado, dicha estructura se podría también modelizar desde el punto de vista acústico como un material poroso. Es por ello que se tratará de analizar diferentes modelos de propagación de ondas mecánicas.

4.1 Modelo lineal de primer orden para fluidos

Considerando un fluido homogéneo de densidad ρ y módulo de compresibilidad κ, a partir de las ecuaciones de conservación del momento y de conservación de la masa,

Noé Jiménez, © 2009 Universitat Politècnica de València

podemos obtener las expresiones que rigen la dinámica de dicho fluido

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p \,, \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{v} \,, \tag{4.2}$$

siendo p la magnitud escalar presión acústica y $\mathbf{v}$ la magnitud vectorial velocidad de partícula. La onda acústica descrita por este modelo es de naturaleza longitudinal y posee una velocidad de propagación c_p que depende de las propiedades del medio, de manera que

$$c_p = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} \,. \tag{4.3}$$

La introducción de heterogeneidades en este fluido se implementa mediante la variación en función del espacio de la densidad y el módulo de compresibilidad del medio. Ello implica que la onda sufrirá cambios en la velocidad de propagación al atravesar zonas heterogéneas, por lo que se podrán observar los diferentes fenómenos de reflexión, difracción, refracción, etc.

4.2 Modelo lineal de primer orden para sólidos

El modelo propuesto para la propagación de ondas elásticas en sólidos viene gobernado por la segunda ley de Newton y la ley de Hooke, en función de las de constantes elásticas de Lamé λ y μ, y la densidad ρ de dicho sólido. Así, la deformación en función del esfuerzo viene dada por la ley de Hooke (Auld, 1973):

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{c} : \boldsymbol{\varepsilon} \,, \tag{4.4}$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones esfuerzo, $\boldsymbol{\varepsilon}$ el tensor de deformaciones y $\boldsymbol{c}$ el tensor de coeficientes elásticos. Así mismo, a partir de la definición de velocidad de partícula como la derivada temporal del desplazamiento, podemos expresar la deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ en función de la velocidad $\mathbf{v}$ como:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \right) \,. \tag{4.5}$$

Sustituyendo (4.4) en (4.5) podemos obtener el esfuerzo en función de la velocidad de partícula como:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\boldsymbol{c}}{2} \left(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \right) \,. \tag{4.6}$$

Simplificando el modelo para sólidos isotrópicos en base ortogonal, podemos expresar el tensor de constantes elásticas $\boldsymbol{c}$ como:

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} . \tag{4.7}$$

De esta manera, reescribiendo (4.7), y a partir de la segunda ley de Newton, podemos expresar las ecuaciones constitutivas de la dinámica de nuestro modelo de sólidos en forma vectorial como:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} = \lambda \bar{\mathrm{I}} \left(\nabla \cdot \mathbf{v}\right) + \mu \left(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla\right) , \tag{4.8}$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} , \tag{4.9}$$

siendo $\nabla \mathbf{v}$ la matriz traspuesta de $\mathbf{v}\nabla$. De manera análoga al caso de fluidos, podemos sustituir operador gradiente y la divergencia en el sistema de coordenadas más adecuado a nuestro problema para deducir las expresiones de forma escalar.

Este modelo describe la propagación en un sólido elástico, linear, isotrópico y sin pérdidas. Dicha propagación se caracteriza principalmente por presentar en el interior del sólido un comportamiento ondulatorio caracterizado por dos tipos de ondas. La primera es una onda longitudinal o de compresión (p-wave), análoga a la existente en los fluidos. Dicho movimiento se caracteriza por que las partículas vibran en la dirección de propagación de la onda (Fig. 4.1). La velocidad de propagación c_p de esta onda se puede calcular en función como:

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} . \tag{4.10}$$

La segunda es una onda transversal o de cizalla (s-wave), y como consecuencia las partículas vibran en la dirección perpendicular a la velocidad de propagación (Fig. 4.2). Dicha velocidad de propagación c_s en un sólido viene dada como:

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} . \tag{4.11}$$

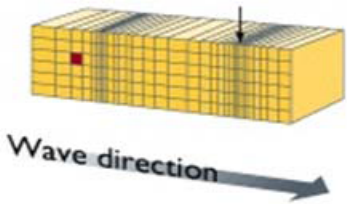


Figura 4.1: Representación de la posición de partícula para una onda longitudinal. El desplazamiento de las partículas es en la misma dirección que la dirección de propagación de la onda.

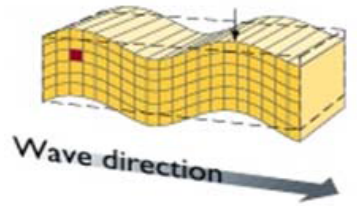


Figura 4.2: Representación de la posición de partícula para una onda transversal. El desplazamiento de las partículas es en la dirección perpendicular a la dirección de propagación de la onda.

Se pueden introducir heterogeneidades en este modelo variando los parámetros elásticos y la densidad en función del espacio. Así, es importante señalar que un material cuyo segundo parámetro de Lamé μ (o módulo de cizalla) sea nulo se comportará en su interior de la misma manera que un fluido de módulo de compresibilidad $\kappa = -\lambda$.

Por otro lado, si existen heterogeneidades pueden aparecer fenómenos ondulatorios más complejos que las ondas p y s. Así, si una perturbación se encuentra con una discontinuidad entre un sólido y un medio fluido aparece una onda en la superficie del sólido denominada onda de Rayleigh (Rayleigh, 1885). Las partículas que son perturbadas por una onda de Rayleigh vibran con una polarización elíptica en el plano sagital con respecto de la velocidad de propagación; es decir trazan elipses respecto de su posición de equilibrio.

Dichas elipses en la superficie se trazan en el sentido contrario a las agujas del reloj, a una profundidad de entorno a $0,2\lambda$ las partículas vibran en la dirección vertical ($u_x = 0$; ver Fig. 4.4) y por debajo las elipses se trazan en sentido contrario. La amplitud del desplazamiento de las partículas decrece exponencialmente con la profundidad y lo hace más rápidamente a longitudes de onda pequeñas, por ello, la onda queda confinada en la superficie la perturbación solo alcanza unas pocas longitudes de onda (Fig. 4.4).

Por otro lado, la amplitud decrece con la distancia a la fuente r con un factor de $1/r$, en comparación con el factor de atenuación por divergencia de las ondas longitudinales y transversales que es $1/r^2$. Además, una fuente impulsiva localizada en la superficie tiende a transmitir mucha más energía por medio de ondas de Rayleigh que por medio de otro tipo de ondas (Stein and Wysession, 2009), por lo que las vibraciones de mayor amplitud detectadas en la superficie suelen ser debidas a ondulaciones tipo Rayleigh (Foti, 2000).

La velocidad de propagación de las ondas de Rayleigh c_r depende de las constantes elásticas pero también de la geometría de la discontinuidad, por lo que para

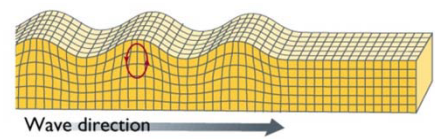


Figura 4.3: Representación de la posición de partícula para una onda Rayleigh. El desplazamiento de las partículas se produce en el plano sagital a la dirección de propagación de la onda, formando elipses que en la superficie giran el sentido contrario a las agujas del reloj.

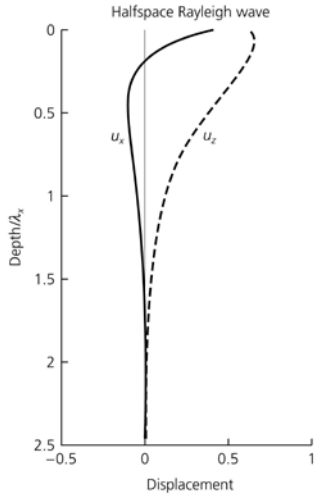


Figura 4.4: Amplitud de las componentes del desplazamiento de partícula para una onda Rayleigh en función de la profundidad normalizada a la longitud de onda (Stein and Wysession, 2009).

una discontinuidad plana (Foti, 2000) y asumiendo un módulo de Poisson igual a 0.25:

$$c_r \approx 0.92 c_s \, . \tag{4.12}$$

Sin embargo, en el caso de existir discontinuidad curvada esta relación puede variar en función del radio de curvatura del contorno (Jin et al., 2005). La velocidad de la onda Rayleigh aumenta en función del módulo de Poisson ν del sólido, así podemos tomar como aproximación la expresión propuesta en (Malischewsky, 2005):

$$c_r = c_s \left(0.874 + 0.196\nu - 0.043\nu^2 - 0.055\nu^3\right) \, . \tag{4.13}$$

Si el módulo de Poisson se mantiene en el rango $\nu = [0, 0.5]$, la velocidad de la onda de Rayleigh varía aproximadamente entre $c_r \approx [0.85, 0.95] c_s$. Por otro lado, aunque teóricamente en un subespacio homogéneos las ondas Rayleigh no son dispersivas, si existen heterogeneidades cada componente de frecuencia viajará entonces a una velocidad concreta (Stein and Wysession, 2009).

Otro tipo de ondas superficiales son las denominadas ondas Love. Este fenómeno ondulatorio aparece solo cuando existe en el material una capa superficial de

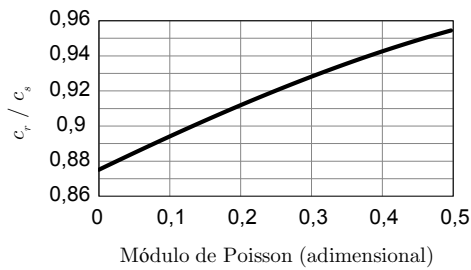


Figura 4.5: Variación de la velocidad de propagación de una onda superficial de Rayleigh en función de la velocidad de propagación de una onda transversal y el módulo de Poisson.

velocidad de propagación inferior a la de la capa subyacente. Dichas ondas están polarizadas horizontalmente, es decir las partículas vibran en la dirección horizontal respecto de la velocidad de propagación. Las ondas Love son dispersivas, y generalizando, podemos afirmar que la velocidad de propagación de una onda de Love c_l será (Stein and Wysession, 2009):

$$c_p > c_s > c_l > c_r. \tag{4.14}$$

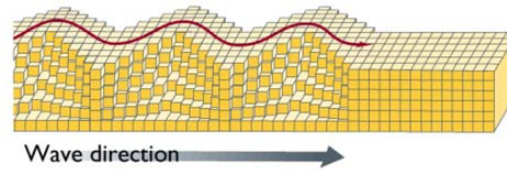


Figura 4.6: Representación de la posición de partícula para una onda Love. En este caso las partículas vibran en la dirección horizontal respecto de la dirección de propagación de la onda.

4.3 Modelos de propagación en medios porosos

Puesto que los tejidos vegetales están compuestos en una muy alta proporción de agua inmersa en estructuras celulares sólidas, podemos aproximar el comportamiento elástico de los productos horticultoras como un material poroso. Dichos modelos se caracterizan además por llevar la heterogeneidad integrada en las ecuaciones, por lo que los parámetros elásticos de los materiales no varían necesariamente en el espacio.

4.3.1 Modelo propuesto por Zwikker-Konsten

Existen numerosos métodos para la descripción del comportamiento dinámico de los materiales porosos. Si consideramos una estructura porosa y rígida (no vibratoria) totalmente inmersa en un fluido podemos describir la relación entre la presión en el fluido y la velocidad de partícula como (Zwikker, 1949):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -R\mathbf{v} - \frac{1}{\rho_p}\nabla p\,, \tag{4.15}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_p c_p^2 \nabla \cdot \mathbf{v}, \tag{4.16}$$

siendo R la resistencia el flujo, k_s la constante de estructura del material poroso; ρ_p la densidad equivalente, c_p la velocidad de propagación equivalente que se calculan en función de la densidad y la velocidad de propagación en el fluido ρ_0, c_0 como:

$$\rho_p = \rho_0 k_s/\phi\,, \tag{4.17}$$

$$c_p = c_0/\sqrt{k_s}, \tag{4.18}$$

donde ϕ es la porosidad. Este modelo describe la propagación de ondas longitudinales de velocidad de propagación c_p y con un coeficiente de atenuación que depende de la resistencia al flujo R. Aunque a la hora de implementarlo este modelo es computacionalmente muy eficiente, para obtener ondas con una velocidad de propagación similar a la obtenida en las mediciones $c_p = [120, 280]$ m/s y tomando la velocidad del fluido acuoso como $c_0 = 1500$ m/s; la constante de estructura ha de tomar valores en el rango $k_s = [156, 29]$ que son valores extremadamente altos comparados con los existentes en la bibliografía. Por ello, con este modelo no se podrán simular las ondas medidas experimentalmente en los tejidos vegetales.

4.3.2 Modelo propuesto por Biot

Otro modelo recurrente en la bibliografía para la simulación de tejidos biológicos porosos (Hosokawa, 2005) es el propuesto por M. A. Biot. Así, este modelo describe la dinámica de un material poroso de estructura elástica inmerso en un fluido viscoso. Dichas ecuaciones determinan la aparición de dos tipos de ondas longitudinales, una rápida c_{pI} y otra lenta c_{pII}, y por otro lado, una onda transversal c_s. La explicación de la existencia de la onda rápida se suele atribuir a la vibración en fase de la estructura elástica y el fluido, y la onda lenta a la vibración de estos en contrafase. La onda transversal se explica debido a la vibración de la estructura elástica (Biot, 1956). Ya que la velocidad de propagación medida experimentalmente en tejidos vegetales es muy baja, la longitud de onda a la frecuencia de trabajo (40 kHz) es del orden de 5 mm, que es muy superior al tamaño del poro en estos tejidos. Por tanto, la aproximación para el modelo de baja frecuencia de Biot (1956), predice velocidades de propagación que podemos resumir como (Forest et al., 1998):

$$c_{pI} \cong \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}} \cong \sqrt{\frac{\left(K_g + \frac{4}{3}\mu_g\right) + \frac{K_f}{\varphi}}{\rho}}\,, \tag{4.19}$$

$$c_{pII} \cong 0\,, \tag{4.20}$$

$$c_S \cong \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \cong \sqrt{\frac{\mu_g}{\rho}}\,, \tag{4.21}$$

donde K_s, K_f, K_g, son respectivamente el módulo de Bulk del sólido, el del fluido, y el de la estructura, ρ la densidad promedio, ϕ la porosidad y μ_g el módulo de cizalla o segunda constante de Lame de la estructura. La densidad promedio ρ se puede calcular en función de la densidad del sólido ρ_S y la del fluido ρ_f como:

$$\rho = (1 - \phi)\,\rho_S + \phi\rho_f\,. \tag{4.22}$$

Así, y como mostramos en la Tabla 1, la densidad promedio de los tejidos vegetales está entre $\rho \approx [800, 1000]$ kg/m^3, por lo que tomando la compresibilidad del fluido similar a la del agua ($K_f = 2.2 \cdot 10^9$ Pa) y valores de porosidad de $\phi = [0.5, 1]$, los valores de velocidad de propagación de la primera onda longitudinal serán $c_{pI} = [1400, 2500]$ m/s que son valores superiores a los medidos experimentalmente. Debido a la aproximación de baja frecuencia de la teoría de Biot, la

segunda onda longitudinal de velocidad c_{pII} será muy atenuada y no será medible experimentalmente (Forest et al., 1998). Debido a que no se conocen con certeza los valores del modulo de cizalla μ_g dinámicos, en las muestras de vegetales habitualmente comercializadas, plantearemos el problema de la onda tranversal a la inversa. Así, para que la onda transversal c_s descrita por Biot tome valores similares a los medidos en la corteza de naranja, el módulo de cizalla dinámico ha de estar en el rango $\mu_g = [12, 50]$ MPa, muy superior al modulo de cizalla estático $[666, 745]$ kPa expresado en (Fidelibus et al., 2002).

4.3.3 Modelo propuesto por Wilson et al.

Otro ejemplo de modelo teórico para la descripción del comportamiento de los materiales porosos es el propuesto en (Wilson et al., 2004):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\beta_\infty}\nabla\cdot\mathbf{v} - \frac{(\gamma-1)}{\sqrt{\pi\tau_{\mathrm{e}}}}\int_{-\infty}^{t'}\frac{1}{\sqrt{t-t'}}\frac{\partial p}{\partial t'}\mathrm{e}^{-\frac{t-t'}{\tau_{\mathrm{e}}}}dt', \tag{4.23}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -V_\infty\nabla p + \frac{V_\infty}{\sqrt{\pi\tau_{\mathrm{v}}}}\int_{-\infty}^{t'}\frac{1}{\sqrt{t-t'}}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{e}^{-\frac{t-t'}{\tau_{\mathrm{v}}}}dt', \tag{4.24}$$

donde β_∞ es la compresibilidad compleja, V_∞ es el volumen complejo para altas frecuencias y τ_{e} y τ_{v} son las constantes de relajación procesos de entropía y vorticidad. Dicho modelo, al igual que el propuesto por Zwikker, considera la estructura sólida rígida, por lo que la velocidad de propagación de la onda longitudinal descrita viene gobernada principalmente por las características del fluido en la que el material está inmersa. Es por ello que si consideramos el fluido como agua, la velocidad de propagación no alcanzará valores tan bajos como los medidos experimentalmente. Además, la discretización del término convolutivo de las ecuaciones mediante diferencias finitas implica realizar un buffer de memoria para las variables de presión y velocidad, lo que en 3D dimensiones resulta computacionalmente inaceptable.

4.4 Modelo de atenuación en sólidos

4.4.1 Primera aproximación

Un modelo sencillo para describir la atenuación de la onda mecánica en un sólido es la analogía con el atenuador mecánico aplicado a la ley de Hooke (Auld, 1973). De esta manera, podemos añadiendo un término proporcional a la velocidad que modele la amortiguación. Así, en una dimensión:

$$F = ku + k'\frac{\partial u}{\partial t}\,, \tag{4.25}$$

siendo F la fuerza aplicada, u el desplazamiento, k la constante elástica y k' el factor de amortiguamiento. Siguiendo la analogía propuesta por (Auld, 1973) podemos

expresar el esfuerzo en función de la deformación como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{c} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\eta} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} \,, \tag{4.26}$$

donde $\boldsymbol{\eta}$ es la viscosidad. Dicha modelización de pérdidas ha sido implementada en diferencias finitas para la simulación de tejidos humanos en (Hosokawa, 2008). Así, en una primera aproximación para sólidos isotrópicos viscoelásticos, las 9 ecuaciones que relacionan la velocidad de partícula y esfuerzo serán:

$$\rho \frac{\partial v_\xi}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{\psi\psi}}{\partial \psi} + \frac{\partial \sigma_{\xi\zeta}}{\partial \zeta} \,, \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\xi\xi}}{\partial t} = -\gamma_{\xi\xi}\sigma_{\xi\xi} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \lambda \frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta} \,, \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\xi\psi}}{\partial t} = -\gamma_{\xi\psi}\sigma_{\xi\psi} + \mu \frac{\partial v_\xi}{\partial \psi} + \lambda \frac{\partial v_\psi}{\partial \xi} \,, \tag{4.29}$$

donde $\xi, \psi, \zeta = x, y, z$; ρ, λ y μ la densidad y las constantes de Lamé respectivamente, y $\gamma_{\xi\xi}$, $\gamma_{\xi\psi}$ los coeficientes de resistencia longitudinal y transversal. Estos últimos coeficientes son proporcionales al coeficiente de atenuación de la onda (Hosokawa, 2008). Este modelo representa una aproximación eficiente a la hora de implementarlo numéricamente, ya que como veremos en la sección **??**, la inclusión de condiciones de contorno absorbente del tipo PML tienen la misma forma que los coeficientes de resistencia $\gamma_{\xi\xi}$, $\gamma_{\xi\psi}$.

4.4.2 Perdidas viscoelásticas

El modelo anterior representa una primera aproximación al fenómeno de absorción por pérdidas viscoelásticas. Podemos describir un modelo más completo para la propagación de ondas elásticas en un medio viscoelástico, linear e isotrópico como el descrito en Bastard et al. (2009):

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{T} + \boldsymbol{\sigma}) \,, \tag{4.30}$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad, $\mathbf{T}$ es el tensor de esfuerzos elásticos y $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de esfuerzos viscoelásticos. Podemos describir $\mathbf{T}$ de manera análoga al modelo de sólidos elásticos como:

$$\mathbf{T} = \lambda tr\,(\boldsymbol{\varepsilon})\, I + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \,, \tag{4.31}$$

siendo $\boldsymbol{\varepsilon}$ la deformación definida en función del desplazamiento $\mathbf{u}$ como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla\right) \,. \tag{4.32}$$

De entre los modelos existentes para modelar la viscosidad de un sólido podemos escoger el de Voigt (Auld, 1973) para introducir el comportamiento viscoelástico en nuestras ecuaciones. Así, podemos definir el tensor de esfuerzo viscoso como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \eta_p tr\,(\mathbf{S}')\, I + 2\eta_s \mathbf{S}' \,, \tag{4.33}$$

siendo η_p el segundo coeficiente de viscosidad, η_s la viscosidad transversal y $\mathbf{S}'$ el tensor de tasa de deformación. El segundo coeficiente de viscosidad η_p puede ser calculado a partir de la viscosidad volumétrica η_v como:

$$\eta_p = \eta_v - \frac{2}{3}\eta_s \,. \tag{4.34}$$

Además, el tensor de tasa deformación S' está directamente relacionado con la velocidad de partícula mediante:

$$\mathbf{S}' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \left(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla\right) \,. \tag{4.35}$$

Así, y a modo de ejemplo, podemos obtener para un sistema de coordenadas cartesiano 3D las siguientes expresiones:

$$\rho \frac{\partial v_\xi}{\partial t} = \frac{\partial \left(T_{\xi\xi} + \sigma_{\xi\xi}\right)}{\partial \xi} + \frac{\partial \left(T_{\psi\psi} + \sigma_{\psi\psi}\right)}{\partial \psi} + \frac{\partial \left(T_{\xi\zeta} + \sigma_{\xi\zeta}\right)}{\partial \zeta} \,, \tag{4.36}$$

$$\frac{\partial T_{\xi\xi}}{\partial t} = \left(\lambda + 2\mu\right) \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \lambda \frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta} \,, \tag{4.37}$$

$$\frac{\partial T_{\xi\psi}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v_\xi}{\partial \psi} + \frac{\partial v_\psi}{\partial \xi} \right) \,, \tag{4.38}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\xi\xi}}{\partial t} = \left(\eta_p + 2\eta_s\right) \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \eta_p \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \eta_p \frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta} \,, \tag{4.39}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\xi\psi}}{\partial t} = \eta_s \left(\frac{\partial v_\xi}{\partial \psi} + \frac{\partial v_\psi}{\partial \xi} \right) \,, \tag{4.40}$$

para las tres componentes de velocidad de partícula $v(\xi, \psi, \zeta = x, y, z)$; las tres componentes de esfuerzo elástico normal $T(\xi, \psi, \zeta = x, y, z)$; las tres componentes de esfuerzo elástico de cizalla $T(\xi, \psi, \zeta = x, y, z)$; las tres componentes de esfuerzo viscoelástico normal $\sigma(\xi, \psi, \zeta = x, y, z)$, y las tres componentes de esfuerzo viscoelástico de cizalla $\sigma(\xi, \psi, \zeta = x, y, z)$.

Capítulo 5

DISCRETIZACIÓN DE LOS MODELOS EN DIFERENCIAS FINITAS

Con el objetivo de obtener una solución numérica de las ecuaciones propuestas anteriormente se describen a continuación los métodos numéricos empleados. Todos ellos están basados en diferencias finitas en dominio de tiempos o comúnmente denominados FDTD (*Finite-Differences in Time-Domain*). El principal interés del uso de este método en este trabajo es que al trabajar en el dominio temporal la obtención de resultados se realiza con un mínimo procesado. Así, la determinación de las velocidades de propagación de las diferentes ondas en los vegetales simulados así como su atenuación es directa a partir de los resultados de la simulación.

5.1 Aproximación de la derivada mediante diferencias finitas

Los métodos numéricos basados en diferencias finitas tratan de resolver de forma numérica problemas en forma diferencial. Por ello, la aproximación de las derivadas mediante diferencias finitas será el principal factor que afecte a la precisión del método. La aproximación de una derivada se puede aproximar de diferentes formas entre las que están la anterior, la posterior y la central. En concreto, el método FDTD utiliza la aproximación central de las derivadas, tanto en tiempo como en espacio.

Noé Jiménez, © 2009 Universitat Politècnica de València

5.1.1 Diferencias finitas centradas de segundo orden

Para la obtención de las diferencias finitas centradas haremos uso del desarrollo en serie de Taylor; de manera que podemos aproximar la función $f(x)$ en un punto x_i como:

$$f(x_i) = f|_{x_i} + (x - x_i)\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_i} + \frac{(x-x_i)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_i} + \frac{(x-x_i)^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x_i} + \cdots \tag{5.1}$$

Así, la aproximación de la función $f(x)$ en un punto $(x_0 + \Delta x/2)$, tal y como se observa en la Fig.5.1, vendrá dada por:

$$f|_{x_0+\frac{\Delta x}{2}} = f|_{x_0} + \frac{\Delta x}{2}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x_0} + \cdots \tag{5.2}$$

Y análogamente, la aproximación en el punto $(x_0 - \Delta x)$ vendrá dada por:

$$f|_{x_0-\frac{\Delta x}{2}} = f|_{x_0} - \frac{\Delta x}{2}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x_0} + \cdots \tag{5.3}$$

Con el objetivo de obtener la diferencia centrada restaremos (5.2) y (5.3):

$$f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right) = \Delta x\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} + \frac{\Delta x^3}{6}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x_0} + \cdots \tag{5.4}$$

Como podemos observar los términos impares del desarrollo en serie de Taylor se anulan, con lo dividiendo ambos términos por Δx podemos obtener:

$$\frac{f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} + \frac{\Delta x^2}{6}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x_0} + \cdots \tag{5.5}$$

Apreciamos aquí como podemos aproximar la derivada de una función mediante el uso de diferencias finitas centradas, teniendo como error el cuarto término así

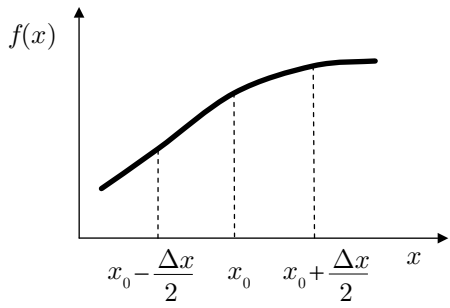


Figura 5.1: Función $f(x)$ evaluada en x_0, $x_0 - \Delta x/2$ y $x_0 + \Delta x/2$.

como el resto de términos pares del desarrollo en serie de Taylor que decrecen en amplitud. Es por ello que el error cometido (expresado con el símbolo $\mathcal{O}$) es proporcional al cuadrado del equiespaciado Δx:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} = \frac{f\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}+\mathcal{O}(\Delta x)^2\,. \tag{5.6}$$

Ello implica que si reducimos el equiespaciado Δx en un factor 10, el error de la aproximación de la derivada se reducirá en un factor 100. A continuación, la aproximación de los términos diferenciales en espacio se expresarán como:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} \approx \frac{f\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}\,, \tag{5.7}$$

y análogamente para las derivadas temporales con un error proporcional a $(\Delta t)^2$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t_0} \approx \frac{f\left(t_0+\frac{\Delta t}{2}\right)-f\left(t_0-\frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t}\,. \tag{5.8}$$

Es importante observar cómo esta aproximación de la derivada por medio de la diferencia centrada está evaluada en el punto x_0, mientras que la función está evaluada en los puntos $x_0 \pm \Delta x$, por lo que no será posible calcular la derivada de una función en los puntos donde evaluamos la función. Como consecuencia, los métodos FDTD realizan una discretización de los campos al tresbolillo.

5.1.2 Diferencias finitas centradas de cuarto orden

Procediendo de igual manera, podemos incrementar la precisión en el cálculo de la derivada si despreciamos menos términos en el desarrollo en serie de Taylor, por lo que fácilmente podemos obtener:

$$\begin{aligned} f\left(x_0+\frac{3\Delta x}{2}\right) &= f|_{x_0}+\frac{3\Delta x}{2}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0}+\frac{1}{2!}\left(\frac{3\Delta x}{2}\right)^2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0}+ \\ &\quad +\frac{1}{3!}\left(\frac{3\Delta x}{2}\right)^3\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x_0}+\cdots \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned} f\left(x_0-\frac{3\Delta x}{2}\right) &= f|_{x_0}-\frac{3\Delta x}{2}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0}+\frac{1}{2!}\left(\frac{3\Delta x}{2}\right)^2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0}+ \\ &\quad -\frac{1}{3!}\left(\frac{3\Delta x}{2}\right)^3\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x_0}+\cdots \end{aligned} \tag{5.10}$$

Restando las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$f\left(x_0+\frac{3\Delta x}{2}\right)-f\left(x_0+\frac{3\Delta x}{2}\right)=\frac{3\Delta x}{2}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0}+\frac{2}{3!}\left(\frac{3\Delta x}{2}\right)^3\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x_0}+\cdots \tag{5.11}$$

Y con el objetivo de obtener la derivada multiplicaremos la ecuación (5.11) por un factor 27 y despejando obtenemos:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} \approx \frac{9}{8}\frac{f\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)-f\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} - \frac{1}{24}\frac{f\left(x_0+\frac{3\Delta x}{2}\right)+f\left(x_0+\frac{3\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}. \tag{5.12}$$

Como podemos observar es una aproximación a la derivada con una precisión de cuarto orden, $\mathcal{O}(\Delta x)^4$, es decir, si disminuimos el equiespaciado Δx en un factor 10, la precisión del resultado aumenta en un factor 10000. El inconveniente de esta aproximación es que hace uso de los 4 puntos cercanos a x_0 lo que aumenta considerablemente el tiempo de procesado y provoca complicaciones a la hora de definir condiciones de contorno, heterogeneidades, etc.

5.1.3 Cálculo de la segunda derivada (segundo orden)

Si lo que se pretende es conseguir una aproximación de la segunda derivada, se puede calcular sumando (en lugar de restar) las expresiones (5.2) y (5.3):

$$f|_{x_0+\frac{\Delta x}{2}} + f|_{x_0-\frac{\Delta x}{2}} = 2f|_{x_0} + \frac{2}{2!}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0} + \frac{2}{4!}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^4 \left.\frac{\partial^4 f}{\partial x^3}\right|_{x_0} + \dots \tag{5.13}$$

Así, despejando la segunda derivada y tomando el resto de términos como el error cometido obtenemos la aproximación de segundo orden:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0} = \frac{f\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)-2f\left(x_0\right)+\left(x_0-\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\Delta x\right)^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2. \tag{5.14}$$

Es importante observar como para calcular la segunda derivada en el punto x_0 necesitamos evaluar la función tanto en ese mismo punto x_0 como en los puntos cercanos $(x_0+\Delta x)$ y $(x_0-\Delta x)$, lo que implica complicaciones computacionales ya que en los métodos FDTD los campos están mallados al tresbolillo. Por ello, no conocemos el valor de $f(x)$ en x_0, por lo que se aproximará como:

$$f\left(x_0\right) = \frac{f\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)+f\left(x_0-\frac{\Delta x}{2}\right)}{2}. \tag{5.15}$$

5.2 Introducción al método FDTD

El método FDTD fue propuesto por primera vez para la resolución de problemas de propagación electromagnética por Kane Yee (Yee et al., 1966), y desde la primera aplicación concreta en 1977 por Allen Taflove (Taflove and Brodwin, 1975) este método ha sufrido un rápido desarrollo. Las primeras aplicaciones de este método FDTD al campo de la acústica en fluidos fueron (Botteldooren, 1995; LoVetri et al.,

1996; Wang, 1996; Schneider et al., 1998) y su aplicación a ondas mecánicas en sólidos elásticos lineares y sin pérdidas fue propuesta en sismología por J. Virieux (Virieux, 1986).

Los métodos basados en diferencias finitas son muy intuitivos de implementar y no es necesario hacer complejas transformaciones de las ecuaciones constitutivas. Por otro lado, la introducción de heterogeneidades, anisotropía en el dominio y condiciones de contorno son muy relativamente sencillas de implementar. Además, es mucho más sencillo obtener una respuesta en el dominio de la frecuencia a partir de una señal temporal que viceversa. Como principales inconvenientes de estos métodos numéricos podemos apreciar que, ya que trabajamos en dominio temporal, para obtener un resultado en un tiempo determinado hemos de computar la solución para todos los instantes anteriores, lo que implica en muchos casos largos tiempos de simulación.

Al igual que el resto de métodos numéricos volumétricos es necesario mallar todo el dominio por lo que en muchos casos la memoria necesaria puede ser excesiva, aunque para muchos casos de interés no sea prohibitiva. Por otro lado y a diferencia de los métodos FEM las magnitudes son solo conocidas en los nodos de la malla y en instantes de tiempo discretos. También, debido a que las mallas tienen una forma concreta (rectangular si trabajamos en coordenadas cartesianas, etc.) las reflexiones en elementos no alineados con las mallas (como superficies curvas) pueden no ser demasiado precisas.

5.2.1 Estructura de un algoritmo FDTD

Podemos resumir la estructura de un algoritmo FDTD como:

1. Preprocesado
   - Reemplazar las derivadas de las ecuaciones constitutivas con las diferencias finitas.
   - Discretizar los campos mediante mallas al tresbolillo, tanto en espacio como en tiempo.
2. Procesado
   - Evaluar las ecuaciones resultantes (denominadas ecuaciones de actualización) para los campos futuros que son desconocidos a partir de los valores de los campos actuales. Así, primero resolveremos un campo futuro desconocido avanzando un intervalo de tiempo, con lo que este campo se convierte en pasado conocido. Después, evaluar el otro campo futuro desconocido avanzando de nuevo otro intervalo de tiempo, con lo que nuevamente este campo se convierte en pasado conocido.
   - Repetir los dos pasos anteriores hasta encontrar la solución en el tiempo deseado.
3. Postprocesado

- Puesto que el método trabaja en dominio de tiempos, podemos obtener señales temporales $(p(t), v(t), \sigma(t),)$ etc. directamente de la simulación en cualquier punto del espacio discreto. Posteriormente, se procesarán a conveniencia dichas señales temporales.

5.2.2 Notación

En la discretización de las diferentes magnitudes se usará la siguiente notación: Para la discretización del espacio x, y, z en intervalos Δx, Δy, Δz, en coordenadas cartesianas:

$$x = i \cdot \Delta x\,, \quad y = j \cdot \Delta y\,, \quad z = k \cdot \Delta z\,. \tag{5.16}$$

Para la discretización del espacio r, θ, z en intervalos Δr, $\Delta \theta$, Δz y en coordenadas cilíndricas:

$$r = i \cdot \Delta r\,, \quad \theta = j \cdot \Delta \theta\,, \quad z = k \cdot \Delta z\,. \tag{5.17}$$

Para la discretización del espacio r, θ, ϕ en intervalos Δr, $\Delta \theta$, $\Delta \phi$ y en coordenadas esféricas:

$$r = i \cdot \Delta r\,, \quad \theta = j \cdot \Delta \theta\,, \quad \phi = k \cdot \Delta \phi\,. \tag{5.18}$$

Análogamente, para la discretización del tiempo t en intervalos discretos Δt:

$$t = i \cdot \Delta t\,. \tag{5.19}$$

La discretización temporal de una magnitud al tresbolillo con la expresión anterior será:

$$t = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta t \tag{5.20}$$

La discretización espacial de una magnitud al tresbolillo dependerá de la geometría y será indicada mediante esquemas para cada caso concreto. De esta manera, expresaremos de forma discreta una magnitud cualquiera $f(x, y, z, t)$ como:

$$f\big|_{i,j,k}^{n}\,. \tag{5.21}$$

De igual manera, se adoptará la siguiente convención para otras variables y funciones:

$$r\,(i) \equiv r\,(i \cdot \Delta r) \tag{5.22}$$
$$\sin\,(j) \equiv \sin\,(j \cdot \Delta \theta) \tag{5.23}$$
$$\cot\,(j) \equiv \cot\,(j \cdot \Delta \theta) \tag{5.24}$$

5.3 Aplicación del método FDTD al modelo de acústica de fluidos

Describiremos a continuación la implementación del método FDTD para el modelo de acústica de fluidos en sistema de coordenadas 2D. En los anexos podemos encontrar la implementación del método en los sistemas de coordenadas cartesianas 3D, polar, cilíndrico y esférico.

5.3.1 2D Fluidos, Sistema de coordenadas cartesiano

Mediante el empleo del gradiente en dos dimensiones $\mathbf{r} = (x, y)$:

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}, \tag{5.25}$$

y la divergencia:

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\,, \tag{5.26}$$

podemos reescribir en coordenadas cartesianas 2D las ecuaciones constitutivas (4.1) y (4.2) como:

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}\,, \tag{5.27}$$

$$\rho\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y}\,, \tag{5.28}$$

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\,. \tag{5.29}$$

Siguiendo el flujo de trabajo descrito, discretizaremos los campos de presión y velocidad en intervalos temporales de Δt y espaciales de Δx, y Δy. Así, sustituiremos

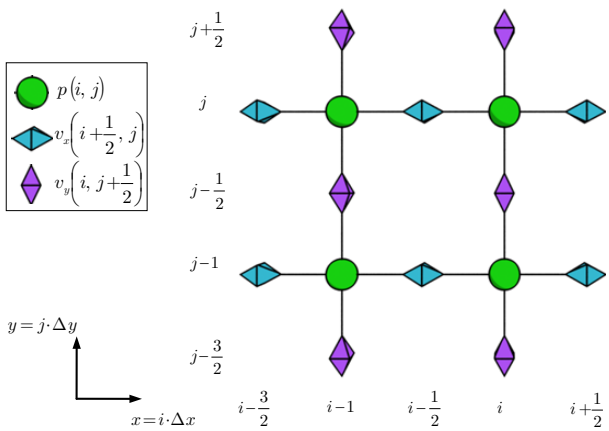


Figura 5.2: Mallado del espacio 2D del modelo de fluidos en un sistema de coordenadas cartesiano.

los términos diferenciales de las expresiones (5.27-5.29) por sus aproximaciones en diferencias finitas descritas. Es necesario remarcar como los elementos de velocidad v_x, v_y, han de estar al tresbolillo con respecto de los elementos discretos de presión p, tanto en espacio como en tiempo, por lo que espacialmente se distribuirán acorde a la Fig. 5.2.

Así, las ecuaciones (5.27-5.29) quedan como:

$$\rho\frac{v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{p\big|_{i+1,j}^{n} - p\big|_{i,j}^{n}}{\Delta x}\,, \tag{5.30}$$

$$\rho\frac{v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{p\big|_{i,j+1}^{n} - p\big|_{i,j}^{n}}{\Delta y}\,, \tag{5.31}$$

$$\frac{1}{\kappa}\frac{p\big|_{i,j}^{n+1} - p\big|_{i,j}^{n}}{\Delta t} = -\frac{v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - v_x\big|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_y\big|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y}. \tag{5.32}$$

Reescribiendo las expresiones anteriores despejando las variables desconocidas en tiempos futuros ($n > 0$) en función de las magnitudes conocidas ($n \leq 0$), podemos escribir las ecuaciones de actualización como:

$$v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} = v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\rho\Delta x}\left(p\big|_{i+1,j}^{n} - p\big|_{i,j}^{n}\right)\,, \tag{5.33}$$

$$v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\rho\Delta y}\left(p\big|_{i,j+1}^{n} - p\big|_{i,j}^{n}\right), \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned} p\big|_{i,j}^{n+1} = p\big|_{i,j}^{n} &- \kappa\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - v_x\big|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}\right) + \cdots \\ &- \kappa\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_y\big|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right). \end{aligned} \tag{5.35}$$

5.3.2 Estabilidad y dispersión

El modelo propuesto es condicionalmente estable, por lo que se debe cumplir en todo el domino la condición de estabilidad siguiente:

$$\mathrm{CFL} = c_{\max}\Delta t\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}} \leq 1\,. \tag{5.36}$$

Para el caso desarrollado que se corresponde al modelo bidimensional, donde $c_{\max}$ es la velocidad de propagación máxima en cualquier punto del dominio, Δt y Δx y Δy son los equiespaciados temporal y los espaciales respectivamente y CFL es el número de Courant. Esta condición se denomina condición de Courant-Friedrichs-Lewy o CFL.

Por otro lado, la dispersión numérica es intrínseca del método e independiente del modelo de ecuaciones físicas escogidas. Ello se debe a que la onda se propaga a diferentes velocidades en función de la dirección: lo hace más rápido en la dirección de la diagonal de la malla que en la dirección ortogonal a esta. Este error implica un

error de fase acumulativo a lo largo de la propagación de la onda que se ha de tratar de minimizar lo máximo posible. Por otro lado, este fenómeno también implica una atenuación numérica de la onda, aunque este perjuicio afecta menos a la precisión del método que el error de fase (Taflove et al., 1995). Un buen indicador de la dispersión es el número de celdas por longitud de onda, o muestreo espacial, N_λ, como:

$$N_\lambda = \frac{\lambda_{\min}}{\Delta_{\max}} \,. \tag{5.37}$$

Así, la longitud de onda mínima vendrá determinada por la frecuencia máxima de la onda, así como las zonas del dominio con velocidad de propagación menor:

$$\lambda_{\min} = \frac{c_{\min}}{f_{\max}} \,. \tag{5.38}$$

A su vez, el incremento espacial $\Delta_{\max}$ se corresponde con la mayor distancia espacial existente en el dominio, que en sistema cartesiano 2D se corresponde con la diagonal mayor en todo el domnio. El valor del muestreo temporal ha de ser alto para que la velocidad de propagación numérica sea lo más parecida posible en las direcciones, Un valor mínimo para el muestreo espacial, que implica mallas computacionalmente aceptables es un valor de 10 muestras por longitud de onda. Así, podemos sintetizar la condición de dispersión para nuestro mallado como:

$$N_\lambda = \frac{c_{\min}}{f_{\max}\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \geq 10 \,. \tag{5.39}$$

5.4 Aplicación del método FDTD al modelo de sólidos

Análogamente al caso de fluidos, describiremos la implementación del método FDTD para el modelo de sólidos lineal, isotrópicos y sin pérdidas en sistema de coordenadas 2D. En los anexos podemos encontrar la implementación del método en los sistemas de coordenadas cartesianas 3D, polar, cilíndrico y esférico.

5.4.1 2D Sólidos, Sistema de coordenadas cartesiano

En el caso de los sólidos elásticos, y trabajando en dos dimensiones (x, y) podemos expresar las ecuaciones que rigen la dinámica de los sólidos elásticos en coordenadas cartesianas 2D para la componente $i = x, y$ de velocidad de partícula v_i como:

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x}, \tag{5.40}$$

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}, \tag{5.41}$$

para la componente $i = x, y$ de esfuerzo normal σ_{ii};

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y}. \tag{5.42}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x}, \tag{5.43}$$

y para la componente de esfuerzo de cizalla σ_{xy}

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right). \tag{5.44}$$

La discretización temporal al tresbolillo de los campos de esfuerzo σ se realizará análoga a los de presión, escogiendo $t = n \cdot \Delta t$ para estos y para los campos de velocidad $t = (n + \frac{1}{2}) \cdot \Delta t$. Sin embargo, la discretización espacial de las componentes de esfuerzo transversal ha de estar necesariamente al tresbolillo con los elementos de velocidad de manera cruzada debido a los términos $\partial v_x / \partial y$ y $\partial v_y / \partial x$ que aparecen en el cálculo de dichos términos de esfuerzo de cizalla. La disposición concreta en el sistema de coordenadas cartesianas 2D se presenta en la Fig.5.3.

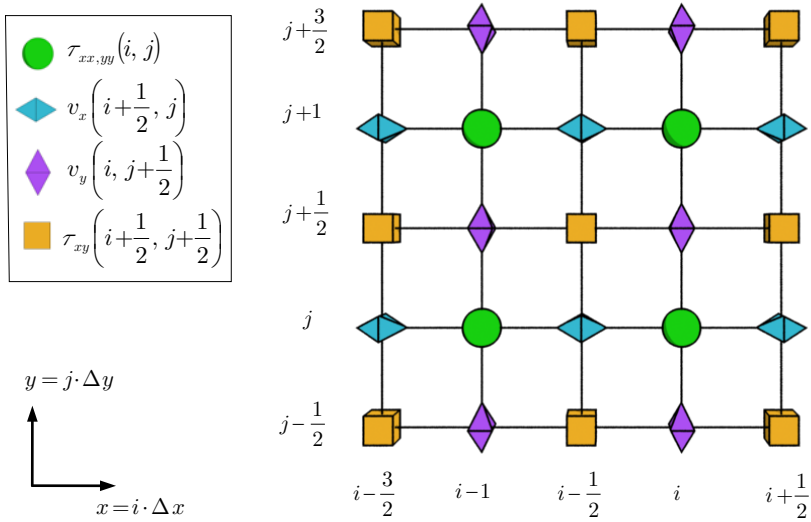


Figura 5.3: Mallado del espacio 2D del modelo de sólidos en un sistema de coordenadas cartesiano.

Así, la discretización en diferencias finitas de las ecuaciones (5.40-5.44) para la componente $i = x, y$ de velocidad de partícula v_i será

$$\rho \frac{v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{\sigma_{xx}\big|_{i+1,j}^{n} - \sigma_{xx}\big|_{i,j}^{n}}{\Delta x} + \frac{\sigma_{xy}\big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n} - \sigma_{xy}\big|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta y}, \tag{5.45}$$

$$\rho \frac{v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{\sigma_{yy}\big|_{i,j+1}^{n} - \sigma_{yy}\big|_{i,j}^{n}}{\Delta y} + \frac{\sigma_{xy}\big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n} - \sigma_{xy}\big|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta x}, \tag{5.46}$$

para la componente $i = x, y$ de esfuerzo normal σ_{ii}

$$\frac{\sigma_{xx}\big|_{i,j}^{n+1} - \sigma_{xx}\big|_{i,j}^{n}}{\Delta t} = (\lambda + 2\mu) \frac{v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - v_x\big|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \lambda \frac{v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_y\big|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y}, \tag{5.47}$$

$$\frac{\sigma_{yy}\big|_{i,j}^{n+1} - \sigma_{yy}\big|_{i,j}^{n}}{\Delta t} = (\lambda + 2\mu) \frac{v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_y\big|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \lambda \frac{v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - v_x\big|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \tag{5.48}$$

y para la componente de esfuerzo de cizalla σ_{xy}

$$\frac{\sigma_{xy}\big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \sigma_{xy}\big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta t} = \mu \left(\frac{v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n+\frac{1}{2}} - v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \cdots \right. \tag{5.49}$$

$$\left. + \frac{v_y\big|_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right). \tag{5.50}$$

De esta manera, las ecuaciones de actualización para sólidos sin pérdidas quedarán como

$$v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} = v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} \left(\sigma_{xx}\big|_{i+1,j}^{n} - \sigma_{xx}\big|_{i,j}^{n} \right) + \cdots + \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} \left(\sigma_{xy}\big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n} - \sigma_{xy}\big|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n} \right), \tag{5.51}$$

$$v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} \left(\sigma_{yy}\big|_{i,j+1}^{n} - \sigma_{yy}\big|_{i,j}^{n} \right) + \cdots + \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} \left(\sigma_{xy}\big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n} - \sigma_{xy}\big|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n} \right), \tag{5.52}$$

$$\sigma_{xx}\big|_{i,j}^{n+1} = \sigma_{xx}\big|_{i,j}^{n} + (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - v_x\big|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \cdots + \lambda \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_y\big|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \tag{5.53}$$

$$\sigma_{yy}\big|_{i,j}^{n+1} = \sigma_{yy}\big|_{i,j}^{n} + (\lambda + 2\mu)\,\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_y\big|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) + \cdots + \lambda\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - v_x\big|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}\right), \tag{5.54}$$

$$\sigma_{xy}\big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \sigma_{xy}\big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n} + \mu\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n+\frac{1}{2}} - v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}\right) + \cdots + \mu\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(v_y\big|_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right). \tag{5.55}$$

5.4.2 Estabilidad y dispersión

Si no tenemos en cuenta la dispersión numérica de las ondas superficiales, podemos demostrar como las ondas longitudinales gobiernan la estabilidad mientras que las transversales rigen la dispersión numérica. Así, de igual manera que para el modelo de fluidos, la condición CFL viene determinada por

$$S = c_{l,\max}\Delta t\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}} \leq 1\,, \tag{5.56}$$

donde $c_{l,\max}$ es la velocidad de propagación máxima de la onda longitudinal en cualquier punto del dominio. En medios heterogéneos, la estabilidad del modelo viene condicionada también por las transiciones entre elementos de diferente elasticidad y densidad (Schröder and Scott Jr, 2002). Así, se ha de cumplir para todos los elementos del dominio respeten las siguientes expresiones

$$\rho_i = \frac{\rho_{i-1} + \rho_{i+1}}{2}, \tag{5.57}$$

$$\frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} + \frac{1}{\lambda_{i-1}}\right), \tag{5.58}$$

$$\frac{1}{\mu_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_{i+1}} + \frac{1}{\mu_{i-1}}\right), \tag{5.59}$$

lo que implica que no existan cambios bruscos de impedancia de un elemento a otro. La dispersión numérica podemos evaluarla igualmente con el muestreo espacial, de manera que obtendremos valores aceptables para

$$N_\lambda = \frac{c_{s,\min}}{f_{\max}\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \geq 10. \tag{5.60}$$

5.5 Aplicación del método FDTD al modelo de sólidos con pérdidas

La implementación de las pérdidas en sólidos se realizará en FDTD acorde al modelo propuesto en (Hosokawa, 2008). Así, y teniendo en cuenta que los campos de

esfuerzo en un instante $t = (n + 1/2)\Delta t$ no son conocidos y deben ser aproximados según (5.15), las ecuaciones (4.27-4.29) se reescribirán en coordenadas cartesianas 2D como

$$\rho \frac{v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{\sigma_{xx}\big|_{i+1,j}^{n} - \sigma_{xx}\big|_{i,j}^{n}}{\Delta x} + \frac{\sigma_{xy}\big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n} - \sigma_{xy}\big|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta y}, \tag{5.61}$$

$$\rho \frac{v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{\sigma_{yy}\big|_{i,j+1}^{n} - \sigma_{yy}\big|_{i,j}^{n}}{\Delta y} + \frac{\sigma_{xy}\big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n} - \sigma_{xy}\big|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta x}, \tag{5.62}$$

para las componentes $i = x, y$ de esfuerzo normal σ_{ii}

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}\big|_{i,j}^{n+1} - \sigma_{xx}\big|_{i,j}^{n}}{\Delta t} = (\lambda + 2\mu) & \frac{v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - v_x\big|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \cdots \\ & -\gamma_{xx} \frac{\sigma_{xx}\big|_{i,j}^{n+1} + \sigma_{xx}\big|_{i,j}^{n}}{2} + \cdots \\ & +\lambda \frac{v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_y\big|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y}, \end{aligned} \tag{5.63}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{yy}\big|_{i,j}^{n+1} - \sigma_{yy}\big|_{i,j}^{n}}{\Delta t} = (\lambda + 2\mu) & \frac{v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_y\big|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \cdots \\ & -\gamma_{yy} \frac{\sigma_{yy}\big|_{i,j}^{n+1} + \sigma_{yy}\big|_{i,j}^{n}}{2} + \cdots \\ & +\lambda \frac{v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - v_x\big|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \end{aligned} \tag{5.64}$$

y para la componente de esfuerzo de cizalla σ_{xy}

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xy}\big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \sigma_{xy}\big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta t} = & -\gamma_{xy} \frac{\sigma_{xy}\big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} + \sigma_{xy}\big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n}}{2} + \cdots \\ & +\mu \frac{v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n+\frac{1}{2}} - v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \cdots \\ & +\mu \frac{v_y\big|_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}. \end{aligned} \tag{5.65}$$

Por brevedad, las ecuaciones de actualización para este modelo se exponen en el anexo.

Capítulo 6

CONDICIONES DE CONTORNO ABSORBENTES

Debido a que los recursos computacionales son siempre limitados, resulta imprescindible para la implementación de un método numérico volumétrico acotar el dominio a discretizar. Así, muchos de los casos requieren de unas condiciones de contorno sobre los límites del dominio que simulen que éste se extiende hasta el infinito. Ello implica que una onda que atraviese los límites del dominio no sufra reflexiones hacia el interior, por lo que dicha condición de contorno ha de ser totalmente absorbente. El término anglosajón para denominar dichas condiciones es *absorbing boundary conditions* (ABC).

Podemos distinguir dos grandes grupos de metodologías para la aplicación de ABC's. El primero lo forman aquellos métodos que tratan las reflexiones aplicando una solución analítica sobre los elementos límite del dominio. El segundo lo forman aquellos métodos que tratan de absorber las ondas ubicando zonas extras de dominio acoplado en impedancia con la región de interés. Dichas zonas se caracterizan por presentar una atenuación numérica que logra atenuar las ondas incidentes como si de una cámara anecoica numérica se tratara.

Noé Jiménez, © 2009 Universitat Politècnica de València

6.1 ABC's, Metodología analítica

Las condiciones de contorno implementadas en el algoritmo inicial de Yee et al. (1966) se basaban en la suposición de que el medio no poseía pérdidas debido a que trataba el dominio como un conductor perfecto (PEC boundary condition), lo cual no es cierto para la mayoría de casos. A partir de entonces se desarrollaron numerosos métodos para implementar ABC's como el propuesto por C. Taylor et al. (1969) que simplemente usaba una extrapolación desde los dos nodos interiores para calcular el nodo externo. Dicho método, aunque es muy simple y sólo supone aumentar el dominio total en un nodo en 1D, una fila en 2D o una superficie en 3D por cada contorno, solo es capaz de atenuar las ondas incidentes en la dirección normal al contorno.

Las múltiples técnicas desarrolladas en los años 70-80 en el campo del electromagnetismo son capaces de absorber las ondas incidentes logrando una atenuación de las reflexiones espurias superior al rango dinámico de los métodos FDTD debido a otro tipo de errores. Aún así, esto sólo ocurre para una incidencia normal, viendo su eficiencia degradada en mayor o menor medida en función del ángulo de incidencia. Así, métodos como el propuesto por A. Taflove and Brodwin (1975) proporcionan una mejora en cuanto a la influencia de la dirección de llegada de la onda EM, pero debido a la naturaleza de la interpolación realizada da lugar reflexiones espurias significativas sin sentido físico. Los operadores propuestos por Bayliss-Turkel (annihilation operators) (Bayliss and Turkel, 1980) consiguen en un amplio rango de ángulos de incidencia una atenuación con un coeficiente de reflexión inferior a 10-2 dB (Taflove et al., 1995). Él método se basa en la construcción de operadores que pueden ser usados para estimar los valores de los campos a lo largo del límite del dominio, siendo su principal dificultad el hecho de que las diferencias centrales necesiten de los nodos adyacentes al nodo que está siendo evaluado para obtener dicho operador.

En cuanto a los primeros trabajos sobre implementación de ABC's para ondas acústicas y elásticas podemos destacar los de A. R. Leavander y C. Cerjan (Cerjan et al., 1985; Levander, 1985). En ellos se demuestra cómo construir una ABC introduciendo una capa de material absorbente cerca de los límites del dominio. Dicha capa produce resultados aceptables sólo para grosores elevados, lo que provoca que el método no sea demasiado eficiente.

Volviendo al electromagnetismo, B. Enqquist y A. Majda implementaron en FDTD ecuaciones diferenciales parciales que permitían la propagación de la onda electromagnética en una sola dirección (OWWES, one way equations) (Engquist and Majda, 1977). La ABC se basa en aplicar estas ecuaciones sobre los límites del dominio de manera que absorban las ondas incidentes en una dirección concreta. En la teoría, el método consigue una absorción total, pero al implementar dicho método en el dominio discreto se ha de aproximar una función no lineal mediante el desarrollo en serie de Taylor. Dicha aproximación es la que provoca la mayor fuente de error del método. La aplicación de este método en tres dimensiones fue propuesta por G. Mur para EM y coordenadas cartesianas (Mur, 1981), que con una aproximación de

segundo orden consigue reducir las reflexiones en 35-40 dB respecto de un relector perfecto (Yuan et al., 1997).

Para ondas elásticas, otro método es el descrito por R. Clayton y B. Enqquist, que diseñaron ABC's mediante la extrapolación de los campos en los límites a partir de los campos cercanos al contorno (Clayton and Engquist, 1977). Podemos encontrar diferentes formulaciones de este método como la propuesta por (Lindman, 1975), (Higdon, 1986), (Higdon, 1987), (Higdon, 1991), (Randall, 1989) o las realizadas por (Peng and Toksöz, 1994). Las ABC's propuestas por Z. P. Liao hacen uso de la teoría de multitransmisión (multitransmitting theory) (Liao et al., 1984). Mediante este método se obtienen reflexiones de entre 10 y 20 dB más atenuadas que las logradas por el método de Mur con una aproximación de segundo orden (Taflove et al., 1995). Sin embargo, todas estas soluciones analíticas presentan una debilidad común que se acentúa en el caso de que el medio presente heterogeneidades y/o absorción: el ángulo de incidencia de la onda.

6.2 PML, Perfectly Matched Layers

La idea del diseño de una condición de contorno absorbente para ondas electromagnéticas propuesta por J. P. Berenger se basa en la construcción de una capa de material ficticio que extienda el dominio unos pocos nodos hacia el exterior de sus límites. Dicha capa ha de estar acoplada en impedancia de manera que el coeficiente de reflexión entre dicha capa y el dominio sea nulo para todos los ángulos de incidencia. Por otro lado, la capa debe ser diseñada para atenuar numéricamente la onda EM que la atraviese, por lo que no existirán reflexiones significativas al incidir la onda en el límite de la capa con el contorno exterior (Berenger, 1994). Como resultado, escogiendo diferentes parámetros como el equiespaciado de la malla Δx, el incremento temporal Δt, o el número de elementos de la capa PML; el método propuesto atenúa las reflexiones en 70 dB, lo que para la mayoría de problemas es más que suficiente. Podemos incrementar la atenuación de la PML refinando las mallas pero el coste computacional comienza a ser excesivo (Katz et al., 1994).

6.2.1 Implementación de las PML para el modelo de fluidos

La aplicación de las ABC's tipo PML en acústica de fluidos fue presentada por Xiaojuen Yuan realizando una analogía entre las ondas EM y las elásticas en fluidos (Yuan et al., 1997). La única complicación es debida a que ya que el campo de presión es escalar, necesitamos expresar la presión en sus componentes ficticias. De esta manera, las ecuaciones constitutivas para un fluido con pérdidas serán:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \alpha' \mathbf{v} = -\nabla p, \tag{6.1}$$

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha p = -\nabla \cdot \mathbf{v}, \tag{6.2}$$

donde α y α' son respectivamente la atenuación por compresibilidad y la atenuación asociada a la densidad. Generalmente α' es cero, pero la introducción de estos coefi-

cientes es muy útil a la hora de implementar las PML. Para que no existan reflexiones debe existir acoplamiento de impedancias, de manera que para incidencia normal:

$$R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}. \tag{6.3}$$

Para conseguir $R = 0$, entonces $Z_1 = Z_2$. La complicación aparece cuando existe atenuación en el medio como la mostrada en las ecuaciones (5.40-5.44). Para ello es necesario definir el número de onda complejo k' en el dominio de la frecuencia justo en la interfase entre los dos medios (Yuan et al., 1997)

$$k' = \frac{\omega}{c}\sqrt{\left(1 - i\frac{\alpha'}{\omega\rho}\right)\left(1 - i\frac{\alpha k}{\omega}\right)}. \tag{6.4}$$

Para que no existan reflexiones la velocidad de fase ha de ser independiente del cambio de impedancia entre los dos medios; es decir, la parte imaginaria del número de onda complejo ha de ser independiente de la frecuencia. Si logramos que la atenuación asociada a la densidad α' sea

$$\alpha' = \alpha\kappa\rho, \tag{6.5}$$

el número de onda será entonces:

$$k' = \frac{\omega}{c} - \frac{\alpha\kappa}{c}, \tag{6.6}$$

ya que $\kappa = \rho c^2$, y reescribiendo en función de la impedancia acústica, $Z = \rho c$,

$$k' = \frac{\omega}{c} - iZ\alpha. \tag{6.7}$$

Si cumplimos la condición (6.5), la atenuación $(z \cdot \alpha)$ de la onda será independiente de la frecuencia, ω, y con ello podremos cumplir la condición de acoplamiento de impedancia para todas las frecuencias. Así, simplificando en una dimensión, la solución para una onda armónica en el dominio sin PML, $\alpha_x = 0$, será

$$p\,(x,t) = p_0 \mathrm{e}^{i(wt-kx)}. \tag{6.8}$$

Eliminando la dependencia del tiempo, la solución en el espacio x será

$$p\,(x) = p_0 \mathrm{e}^{-i(kx)}, \tag{6.9}$$

y para la onda en el interior de las PML será

$$p\,(x,t) = p_0 \mathrm{e}^{-i\left(k'x\right)} = p_0 \mathrm{e}^{-i\left(\frac{\omega}{c} - iz\alpha\right)x} = p_0 \mathrm{e}^{-i(kx)} \mathrm{e}^{-\alpha z x}. \tag{6.10}$$

Como podemos ver esta solución es una onda armónica que se atenúa exponencialmente en el interior del material ficticio de la PML. En este punto aún tenemos el problema de la incidencia oblicua. Berenger demuestra que si la atenuación de la

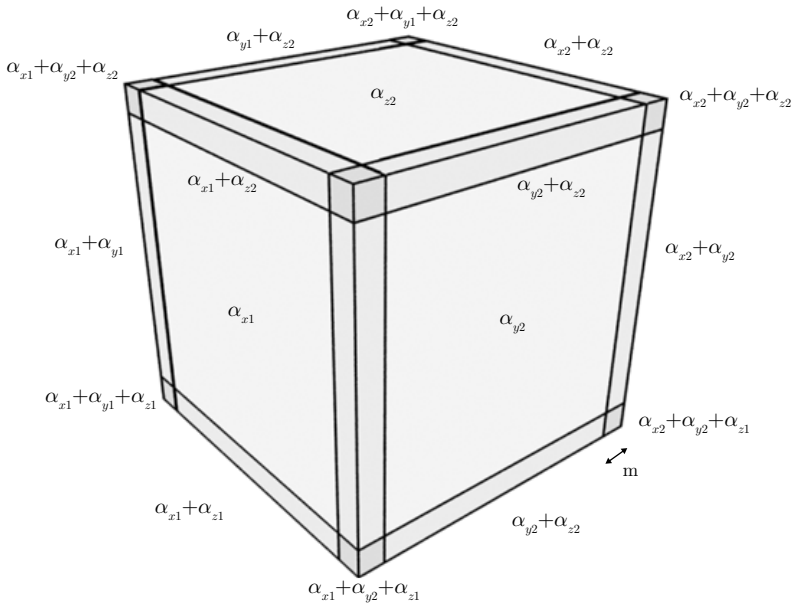


Figura 6.1: Implementación de la absorción de manera anisotrópica en coordenadas cartesianas 3D subrayando las distintas intersecciones de estas.

capa PML se diseña de manera anisotrópica (Fig. 6.1), el coeficiente de reflexión es independiente del ángulo de incidencia. Así, podemos crear un material ficticio con un alto coeficiente de absorción para atenuar las ondas incidentes siempre que cumplamos las condiciones anteriores. Por ello, es necesario dividir el campo escalar de presión en componentes ficticias, reescribiendo así las ecuaciones (6.1) y (6.1) en cartesianas 3D como:

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t} + \alpha_x\rho \cdot v_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\,, \tag{6.11}$$

$$\rho\frac{\partial v_y}{\partial t} + \alpha_y\rho \cdot v_y = -\frac{\partial p}{\partial y}\,, \tag{6.12}$$

$$\rho\frac{\partial v_z}{\partial t} + \alpha_z\rho \cdot v_z = -\frac{\partial p}{\partial z}\,, \tag{6.13}$$

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial p_x}{\partial t} + \alpha_x p_x = -\frac{\partial v_x}{\partial x}\,, \tag{6.14}$$

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial p_y}{\partial t} + \alpha_y p_y = -\frac{\partial v_y}{\partial y}\,, \tag{6.15}$$

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial p_z}{\partial t} + \alpha_y p_z = -\frac{\partial v_z}{\partial z}\,, \tag{6.16}$$

donde $p = p_x + p_y + p_z$. Es sencillo demostrar como cuando $\alpha_i = 0$ en todas sus componentes $i = x, y, z$, las ecuaciones (6.11-6.16) coinciden con las del modelo de

acústica de fluidos sin pérdidas. Así, podemos escoger altos valores de atenuación en el interior de las capas de contorno absorbente y la onda se atenuará sin producir reflexiones.

En la práctica, debido a la discretización, dichos valores se han introducir progresivamente con una función continua, comúnmente se usa una cuadrática (Taflove et al., 1995). El diseño de los valores de α para una capa de absorción de m elementos discretos (Fig. 6.1) se puede calcular como:

$$\alpha_{x(i,j,k)} = \alpha_{\max}\left(\frac{m-i}{m}\right)^2, \quad \alpha_{y(i,j,k)} = 0\,, \quad \alpha_{z(i,j,k)} = 0\,, \tag{6.17}$$

para los elementos i, j, k pertenecientes a la región x_1; $i = 1, \ldots, m-1$, como se muestra en la Fig. 6.1. Para los elementos i, j, k pertenecientes a la región x_2; donde el perfil de absorción es invertido, la función de absorción se calcula de igual manera pero de manera descendente, es decir $i = m-1, \ldots, 1$.

Para i, j pertenecientes a la región y_1, $j = 1, \ldots, m-1$:

$$\alpha_{x(i,j,k)} = 0\,, \quad \alpha_{y(i,j,k)} = \alpha_{\max}\left(\frac{m-j}{m}\right)^2, \quad \alpha_{z(i,j,k)} = 0\,, \tag{6.18}$$

y análogamente, para i, j, k pertenecientes a la región y_2 se introduce el perfil de α_y de manera invertida como $i = 1, \ldots, m-1$.

Finalmente, para i, j, k pertenecientes a la región z_1, $k = m-1, \ldots, 1$:

$$\alpha_{x(i,j,k)} = 0\,, \quad \alpha_{y(i,j,k)} = 0\,, \quad \alpha_{z(i,j,k)} = \alpha_{\max}\left(\frac{m-j}{m}\right)^2. \tag{6.19}$$

Es importante remarcar que en las zonas donde existe intersección de las componentes de absorción se usarán ambas simultáneamente y en las esquinas del cubo las tres componentes. Los resultados de la aplicación de la PML para ondas acústicas muestran que una capa de 8 elementos se obtienen reflexiones atenuadas entre 70-80 dB, 40 dB más con respecto a la ABC propuesta por Mur (Yuan et al., 1997).

6.2.2 Implementación de las PML para el modelo de sólidos

La aplicación de las PML como ABC's para la atenuación de reflexiones en ondas elásticas en sólidos fue propuesta por primera vez por F. Hastings, y J. B. Schneider (Hastings et al., 1996). En este trabajo se aplican las PML de manera análoga al trabajo de Berenger, pero teniendo en cuenta que la existencia de las componentes de esfuerzo transversal complican el proceso. Sin embargo, un año más tarde W. C. Chew y Q. H. Liu (Chew and Weedon, 1994) propusieron la formulación de las PML en electromagnetismo mediante el estiramiento de las coordenadas complejas (*complex coordinate stretching*). Este método es computacionalmente equivalente al propuesto por Berenger (Taflove et al., 1995) pero la formulación y el desarrollo presentado es directamente aplicable a otros tipos de ondas así como a sistemas de coordenadas no ortogonales de una manera sencilla, robusta y elegante. Así, los mismos autores publicaron (Chew and Liu, 1996) la generalización del método complex

coordinate stretching para sólidos elásticos isotrópicos así como la particularización para el sistema de coordenadas cartesianas 2D. Más tarde Q. H. Liu presentó la implementación del método para sistemas de coordenadas curvilíneos (Liu, 1999). La formulación del método complex coordinate stretching se basa en realizar un cambio de variable, de manera que las coordenadas espaciales (x) quedan deformadas.

De esta manera la parte real de las coordenadas posee el sentido físico y la parte imaginaria de las coordenadas complejas se deforma acorde a una función determinada. Así, definimos las coordenadas complejas, $\tilde{x}$, como

$$x \to \tilde{x} = \int_0^x s_x(x')dx', \tag{6.20}$$

siendo s_x una función continua a lo largo de la coordenada x. Este cambio de variable posee esta forma integral a propósito para que las diferenciales parciales en las nuevas coordenadas $\tilde{x}$ sean

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{s_x}\frac{\partial}{\partial x}. \tag{6.21}$$

Además, elegimos la función s_x como

$$s_x = \alpha_x + i\frac{\Omega_x}{\omega}. \tag{6.22}$$

De esta manera, cuando $\alpha_x = 1$ y $\Omega_x = 0$ las coordenadas complejas definidas en (6.20) no se modifican y una onda que se propague por este dominio no sufrirá transformación alguna. Si escogemos los valores de estos parámetros tal que $\Omega_x > 0$, una onda armónica que se propague a través de las coordenadas modificadas se atenuará exponencialmente. A su ves, si escogemos $\alpha_x > 1$ el número de onda en esa capa aumentará y la velocidad de propagación de la onda disminuirá. Puesto que la onda se comprime espacialmente, el efecto es similar a que la capa PML es efectivamente más larga y el espacio se estira. Si escogemos los factores como $\alpha_x > 1$ y $\Omega_x > 0$, podemos obtener valores de absorción muy altos con PML de pocos elementos de grosor.

Así, particularizando al modelo de sólidos elásticos 2D, las variables se deben descomponer en subcomponentes. La notación empleada para la descomposición de los campos vectoriales de velocidad y esfuerzo es

$$v_i = v_i^i + v_i^j, \qquad \tau_{ii} = \tau_{ii}^i + \tau_{ii}^j, \qquad \tau_{ij} = \tau_{ij}^i + \tau_{ij}^j. \tag{6.23}$$

Para cada componente $i = x, y$, $j = y, x$. Resumiendo, los subíndices indican las componentes físicas de los campos y los superíndices la descomposición de cada componente. La descomposición de cada componente obedece a la dirección de las derivadas parciales aplicadas para que la absorción de la PML se aplique de manera anisotrópica.

Así, las 5 ecuaciones del modelo de sólidos 2D se transforman realizando el cambio de variable y descomponiendo sus componentes en 9 expresiones

$$\rho\left(\alpha_x\frac{\partial v_x^x}{\partial t}+\Omega_x v_x^x\right)=\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\,, \tag{6.24}$$

$$\rho\left(\alpha_y\frac{\partial v_x^y}{\partial t}+\Omega_y v_x^y\right)=\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\,, \tag{6.25}$$

$$\rho\left(\alpha_x\frac{\partial v_y^x}{\partial t}+\Omega_x v_y^x\right)=\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}\,, \tag{6.26}$$

$$\rho\left(\alpha_y\frac{\partial v_y^y}{\partial t}+\Omega_y v_y^y\right)=\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}\,, \tag{6.27}$$

para las componentes $i = x, y$; de velocidad de partícula v_i,

$$\alpha_x\frac{\partial \tau_{xx}^x}{\partial t}+\Omega_x\tau_{xx}^x=(\lambda+2\mu)\,\frac{\partial v_x}{\partial x}\,, \tag{6.28}$$

$$\alpha_y\frac{\partial \tau_{xx}^y}{\partial t}+\Omega_y\tau_{xx}^y=\lambda\frac{\partial v_y}{\partial y}\,, \tag{6.29}$$

$$\alpha_x\frac{\partial \tau_{yy}^x}{\partial t}+\Omega_x\tau_{yy}^x=\lambda\frac{\partial v_x}{\partial x}\,, \tag{6.30}$$

$$\alpha_y\frac{\partial \tau_{yy}^y}{\partial t}+\Omega_y\tau_{yy}^y=(\lambda+2\mu)\,\frac{\partial v_y}{\partial y}\,, \tag{6.31}$$

para las componente $i = x, y$ de esfuerzo normal τ_{ii}, y

$$\alpha_x\frac{\partial \tau_{xy}^x}{\partial t}+\Omega_x\tau_{xy}^x=\mu\frac{\partial v_y}{\partial x}\,, \tag{6.32}$$

$$\alpha_y\frac{\partial \tau_{xy}^y}{\partial t}+\Omega_y\tau_{xy}^y=\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\,, \tag{6.33}$$

para la componente de esfuerzo de cizalla τ_{ij}.

De esta manera, podemos identificar como afectan los parámetros α_i y Ω_i a una onda que se propague por las PML: el primero es el coeficiente de escalado de la PML y el segundo el de atenuación. Así, si $\alpha_i \geq 1$ la onda en el interior de este dominio sufre una compresión espacial, es decir su longitud de onda dentro de la PML se divide por un factor α_i. Así, aumentando este parámetro podemos aumentar el número de longitudes de onda que caben en la PML, es decir estamos disminuyendo la velocidad de propagación de la onda en la PML. El otro parámetro, Ω_i, describe cómo de rápido se produce la atenuación de la onda en el interior de la PML.

De igual forma que ocurría en el método de Berenger, los parámetros α_i, Ω_i se han de implementar como funciones continuas de x para que no se produzcan reflexiones. Así, podemos usar una función cuadrática para implementar la transición de α_i desde 0 hasta $\alpha_{\max}$ y Ω_i desde 1 hasta $\Omega_{\max}$. Es muy importante tener en cuenta que, puesto que las mallas están al tresbolillo, la discretización de las funciones α_i y Ω_i se ha de realizar en puntos acorde a la discretización de los campos $x = i \cdot \Delta x$ y a $x = (i + \frac{1}{2}) \cdot \Delta x$, como se muestra en la Fig. 6.2.

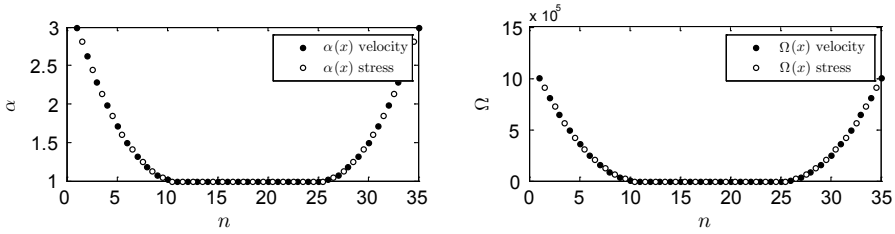


Figura 6.2: Ejemplo de implementación de PML. Funciones α_i y Ω_i discretizadas para un dominio de 35 elementos, espesor de la capa 12 elementos, $\alpha_{\max} = 3$, $\Omega_{\max} = 106$ rad/s.

En cuanto a los valores máximos, se buscará una combinación de los dos parámetros que optimice la implementación de la capa, tanto en su efectividad (coeficiente de reflexión) como en su eficiencia (número de elementos de la PML). Empíricamente se ha obtenido que con factores del orden de $\alpha_{\max} = (2, 4)$, $\Omega_{\max} = \omega_{\max}$, siendo $\omega_{\max}$ la frecuencia de la onda incidente y un espesor de la capa $m = (12, 20)$ elementos se producen reflexiones de -95 dB, consideradas despreciables si se comparan con otras fuentes de error numérico.

Por otro lado, las ecuaciones no requieren un tratamiento especial en cuanto a la estabilidad, por lo que se respetará la condición de estabilidad formulada.

6.2.3 Implementación de las PML para el modelo de sólidos con pérdidas

La aplicación del método complex coordinate stretching para el modelo de sólidos con perdidas propuesto en la Sección 5.5 es trivial, ya que la formulación de las pérdidas mediante los coeficientes de resistencia tiene la misma forma que la variable Ω_i. Así implementaremos las PML en este modelo igual que en el apartado anterior, pero en el interior del dominio $\alpha_i = 1$ y $\Omega_i = \gamma_i$ para todas las componentes i de nuestro sistema de coordenadas.

6.2.4 Implementación de las PML en sistemas de coordenadas curvilíneos

El método complex coordinate stretching se puede aplicar fácilmente a sistemas de coordenadas curvilíneos siguiendo el mismo procedimiento bajo ciertas consideraciones. Simplemente hemos de tener en cuenta que en el cambio de variable afecta a la dependencia radial que aparece en las ecuaciones de los sistemas polares, cilíndricos y esféricos como

$$r \to \tilde{r} = \int_0^r s_r(r')dr' = \mathrm{A}_r(r) + i\frac{\Omega_r'(r)}{\omega}\,. \tag{6.34}$$

Para las demás variables, θ, ϕ ó z según el sistema, se realizará un cambio de variable análogo al de coordenadas cartesianas visto anteriormente. Además, se realizará

la descomposición de las componentes de los campos en función de la dependencia de cada una de ellas con cada coordenada. Concretamente las ecuaciones resultantes y la descomposición necesaria para estos sistemas de coordenadas están recopiladas en el anexo.

Capítulo 7

MODELO NUMÉRICO PROPUESTO PARA LA SIMULACIÓN DE TEJIDOS VEGETALES

7.1 Simulación con módulos de elasticidad estáticos

Para obtener resultados correctos en un experimento numérico, necesitamos cumplir varios requisitos. El modelo matemático se ha de ajustar a la realidad que queremos describir, al menos en el rango de las variables con las que estemos trabajando. Por otro lado, los métodos numéricos empleados para implementación el modelo matemático han de estar optimizados para minimizar errores, ya que todos los métodos numéricos son siempre una aproximación a la solución analítica de un problema. Por último, los datos de entrada para las variables de nuestro modelo han de ser fieles a la realidad que representan.

Para la simulación numérica preliminar del tejido vegetal de la naranja se ha recurrido al modelo de sólidos con pérdidas en coordenadas cartesianas 3D. Así se han introducido los valores elásticos propuestos en la Tabla 3.1 y los demás parámetros que se presentan en la Tabla 7.1. La naranja se ha modelado como una esfera en la que se han dispuesto varias capas. En esta simulación se han utilizado además los siguientes parámetros:

Noé Jiménez, © 2009 Universitat Politècnica de València

Tabla 7.1: Parámetros introducidos y resultados de la simulación preliminar.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
ρ Aire	1.21 kg/m^3	λ Aire	-0.142 MPa	μ Aire	0
ρ Flavedo	903 kg/m^3	λ Flavedo	1,24 MPa	μ Flavedo	1,05 MPa
ρ Albedo	820 kg/m^3	λ Albedo	1,88 MPa	μ Albedo	0,45 MPa
ρ Sacos de zumo	978 kg/m^3	λ Sacos de zumo	-2.2·10^3 MPa	μ Sacos de zumo	0
Radio de la naranja	5 cm				
Espesor del flavedo	2 mm				
Espesor del albedo	3 mm				
$\Delta x = \Delta y = \Delta z$	3,025·10^{-5} m	Δt	4,06·10^{-8} s	Frecuencia	40 kHz
$S_{courant}$	0.8	$N_{\lambda\, mínima}$	10.8 n/λ	$N_{\lambda máxima}$	142.14 n/λ
Espesor PML	12	(PML) α_{max}	2	(PML) Ω_{max}	5.02·10^5 rad/s
Resultados					
Velocidad de propagación longitudinal	54,62 m/s	Velocidad de propagación transversal	23,68 m/s	Velocidad de propagación Rayleigh	22.44 m/s

7.2 Simulación con módulos de elasticidad dinámicos

Los resultados obtenidos de esta primera simulación descubren que con este modelo o parámetros usados en él no podemos describir ondas con velocidades de propagación en la corteza de la naranja que se ajusten al menos aproximadamente a las medidas experimentalmente.

Para conseguir ondas de tal velocidad de propagación con este modelo podemos seguir el siguiente razonamiento: Conocemos las velocidades de propagación de las ondas superficiales medidas experimentalmente, así como existen múltiples referencias que demuestran que en tejidos biológicos (acuosos o *water-like tissue*) (Bastard et al., 2009) las ondas longitudinales se propagan con velocidades similares a las del agua. Mediante las dos velocidades de propagación c_r y c_l podemos obtener las constantes elásticas del medio sólido en el que se propaga como:

$$\lambda = \rho \left(c_l^2 + 2c_s^2\right), \tag{7.1}$$

$$\mu = \frac{\rho c_l^2 - \lambda}{2}. \tag{7.2}$$

Y si queremos obtener el módulo de Young y el módulo de Poisson en función de las constantes de Lamé:

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \tag{7.3}$$

$$v = \frac{\lambda}{2\left(\lambda + \mu\right)}. \tag{7.4}$$

Así, considerando que la velocidad de la onda de Rayleigh es muy similar a la velocidad transversal si la comparamos con la velocidad longitudinal, obtenemos valores de las contantes elásticas de la corteza de la naranja acordes a los listados en la Tabla 7.2.

Tabla 7.2: Parámetros necesarios para la corteza de la naranja.

Parámetro	Valor
Velocidad de propagación longitudinal	1500 m/s
Velocidad de propagación transversal	200 m/s
Velocidad de propagación Rayleigh	197.4 m/s
ρ Flavedo	903 kg/m^3
λ Flavedo	1.95 GPa
μ Flavedo	36 MPa
E Flavedo	107.3 MPa
v Flavedo	0,491

La primera constante de Lamé, λ, se aproxima al valor del módulo de compresibilidad para valores del módulo de Poisson altos. Así, podemos observar como λ se aproxima al valor de la compresibilidad del agua. Por otro lado, para que en nuestra naranja se produzcan ondas (c_r y c_l) con dichas velocidades, el módulo de Poisson ha de aumentar bastante. Los tejidos biológicos y sólidos viscoelásticos pueden alcanzar módulos de Poisson de entorno $v = (0,490, 0,499)$ (Goss et al., 1978) que se ajustan perfectamente a los resultados obtenidos aquí para sólidos elásticos. Por último, las diferencias existentes entre el módulo de Young inicial (estático) y el calculado aquí se explicarán en el apartado conclusiones.

7.3 Señal de excitación

La señal de entrada escogida es una transformada wavelet, específicamente una Ricker wavelet, obtenida como la segunda derivada un pulso Gaussiano:

$$p(t) = p_0 \left(1 - \omega_0 t^2\right) \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2} t^2}, \tag{7.5}$$

comúnmente conocida como *Mexican hat wavelet* debido a su parecido con un sombrero mexicano. Con ella, excitamos el dominio con un transitorio corto asegurando una transición suave, sin discontinuidades. En el dominio de la frecuencia esta señal está limitada en banda, por lo que la diseñamos sin contenido espectral por encima de 40 kHz para no introducir componentes dispersivas en el medio. La Figura 7.1 muestra la señal de excitación empleada.

7.4 Coste computacional

El coste computacional del algoritmo es muy alto debido a que para la implementación de las PML necesitamos descomponer las componentes de esfuerzo y velocidad según su dependencia con cada coordenada. Así, en 3D, las 3 componentes del campo de velocidad y las 6 del campo de esfuerzo se descomponen en 9 para la velocidad, 9 para el esfuerzo normal y 6 para el esfuerzo de cizalladura. Asimismo,

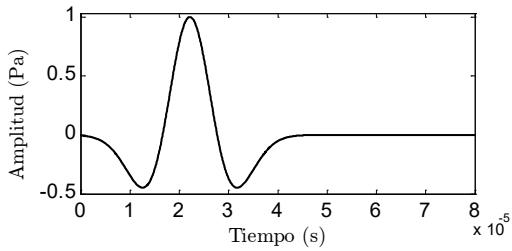


Figura 7.1: Señal de entrada en el domino temporal, Ricker wavelet, obtenida como la segunda derivada un pulso Gaussiano.

necesitamos otras 3 mallas adicionales para guardar las componentes de velocidad individualmente e igualmente otras 6 mallas para las componentes de esfuerzo sin descomponer.

Por otro lado, ya que simulamos dominios heterogéneos es necesario guardar las características del medio en función del espacio, lo que computacionalmente requiere de otras tres mallas más: una para la densidad y otras 2 para las constantes elásticas. En total tenemos 31 mallas para los campos y 3 para las constantes del medio. Así, y sin contar factores minoritarios como las funciones de las PML que se pueden optimizar (aunque ello implique un mayor tiempo de procesado) podemos calcular el coste computacional del algoritmo en cartesianas trabajando en doble precisión como:

$$C \geq 8 \cdot (n_x \cdot n_y \cdot n_z) \cdot 34\,\text{Bytes}. \tag{7.6}$$

Así para mallar una naranja completa a 10 muestras por longitud de onda y a 40 kHz, necesitaríamos 31.5 GBytes; y si acotamos el dominio en un cubo de 3 cm de lado mediante PML necesitamos 800 MBytes de memoria, por lo que el procesado puede ser realizado en cualquier ordenador común.

Capítulo 8

RESULTADOS

De los resultados de las simulaciones se desprende que el método numérico implementado describe los fenómenos ondulatorios descritos por la teoría. Así, las velocidades de propagación de las distintas ondas se ajustan a las predichas mediante el cálculo analítico a partir de sus constantes elásticas Fig. 8.1.

Podemos representar la posición de partícula como la integral discreta de la velocidad de partícula, de manera que podemos apreciar representando en una gráfica como las partículas oscilan alrededor de su posición de equilibrio. Así, si representamos los elementos discretos pertenecientes a la corteza de la naranja podemos observar como estos vibran con el movimiento característica de una onda de superficie, es decir, las componentes longitudinales de la onda tienen una amplitud muy pequeña comparada con las transversales Fig. 8.2.

Con el objetivo de analizar más a fondo el comportamiento de las ondas superficiales en los medios vegetales, podemos representar la velocidad de partícula en función de la profundidad. Normalizaremos la profundidad a la longitud de onda en el medio vegetal, que es de entorno a 5 mm en la superficie del tejido. Podemos apreciar como a pesar de las heterogeneidades del medio y de poseer este una geometría curvilínea se aprecian diferentes aspectos característicos de las ondas superficiales Fig. 8.3.

Noé Jiménez, © 2009 Universitat Politècnica de València

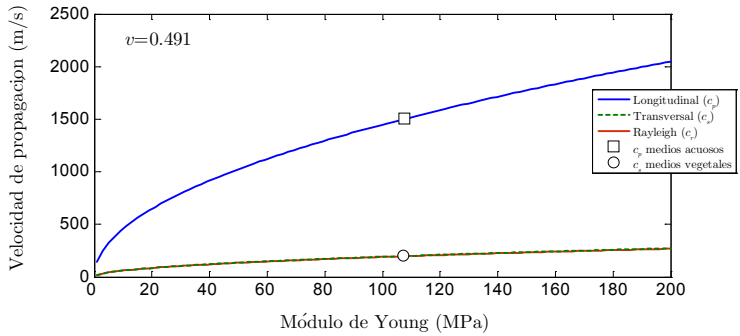


Figura 8.1: Velocidades de propagación para ondas en función de la elasticidad del medio y para un módulo de Poisson de $v = 0.491$.

Podemos observar como las componentes de velocidad están desfasadas espacialmente, de manera que la componente longitudinal es máxima cuando la transversal horizontal es mínima. Por otro lado, la onda se atenúa en función de la profundidad, y aún con la geometría curvilínea de nuestro problema, no consigue penetrar a una distancia mayor que λ.

Por último, a una profundidad de alrededor de $0.2\ \lambda$ las componentes de la velocidad se invierten lo que implica que el movimiento elíptico de las partículas también lo haga; es decir pasan de describir elipses retrógradas en el plano sagital a invertir su movimiento y girar en el sentido contrario.

Para el cálculo de la velocidad de propagación en la superficie del fruto virtual se ha medido la respuesta temporal en función del espacio en puntos de la corteza radialmente distribuidos. La configuración de las medidas es similar al ensayo real, con la diferencia que se ha medido en una cantidad mayor de puntos. Así, podemos representar las señales temporales en función de la distancia al punto de excitación (Fig. 8.4). Los resultados de realizar un ajuste linear por mínimos cuadrados de los

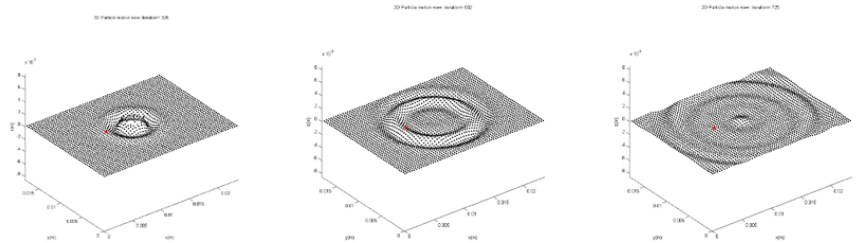


Figura 8.2: Posición tridimensional de la posición de partícula en diferentes instantes de tiempo.

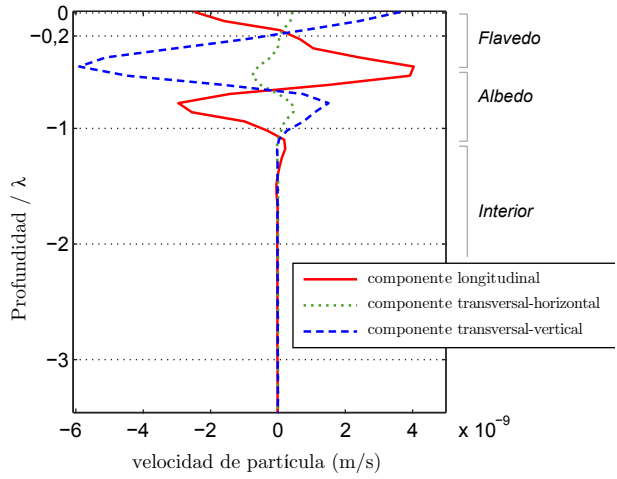


Figura 8.3: Velocidad de partícula en el momento de mayor amplitud en el receptor situado en la superficie del sólido.

valores de distancia a la excitación y el tiempo de vuelo medido son:

$$x = 183,9782t - 0.0043, \tag{8.1}$$

La superposición de la curva calculada y el gráfico tiempo espacio se muestran en al Fig. 8.4. La velocidad de propagación es estimada como la pendiente de esta curva, es decir, $c_{r,\mathrm{num}} = 183.98$ m/s mientras que el término independiente es solo el tiempo transcurrido hasta el primer máximo de señal. Si comparamos con la velocidad de Rayleigh teórica $c_r = 197.42$ m/s calculada para un coeficiente de Poisson de $v = 0.491$ obtenemos un error del 6.8%. Aun así debemos de tener en cuenta que la velocidad teórica puede variar si la geometría de la superficie es curvilínea y si existen heterogeneidades.

Es difícil separar en una señal las componentes superficiales y las longitudinales si no existe un retardo temporal entre la llegada de las ondas rápidas (longitudinales) y las más lentas (superficiales y transversales). Una solución a este problema es aumentar bastante el rango dinámico del diagrama espacio-temporal para poder distinguir claramente unas componentes de otras, como se muestra en la Fig. 8.5. Así, podemos observar en el gráfico como las trazas con una mayor pendiente se corresponden con las perturbaciones causadas por las ondas longitudinales, mientras que seguimos apreciando las trazas de menor pendiente que se corresponden a las componentes debidas a ondas elásticas lentas.

Debido a que la amplitud de las trazas de la velocidad de propagación de la onda longitudinal es muy baja se ha optado por hacer varios ajustes para disminuir la incertidumbre. Así, como resultado de estos ajustes se obtiene una velocidad de propagación $c_l = 1357.40$ m/s, lo que supone un error del 9,5% respecto de la velocidad longitudinal teórica en un medio homogéneo y sin geometría curvilínea.

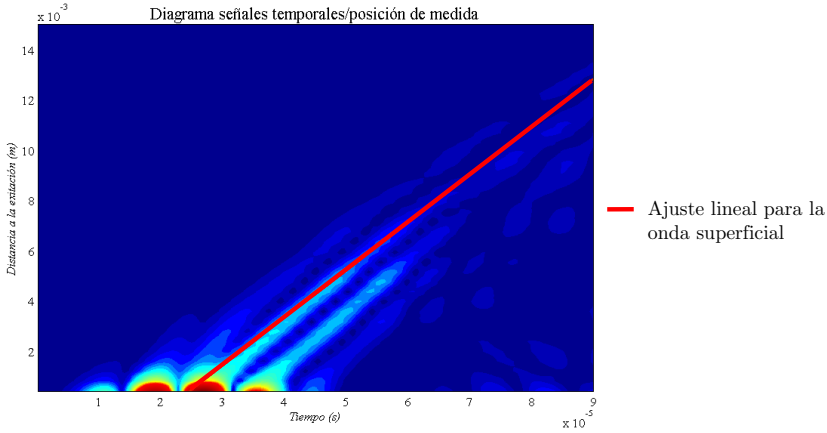


Figura 8.4: Diagrama de la amplitud de las señales capturadas en función de la posición de los receptores para calcular las componentes superficiales.

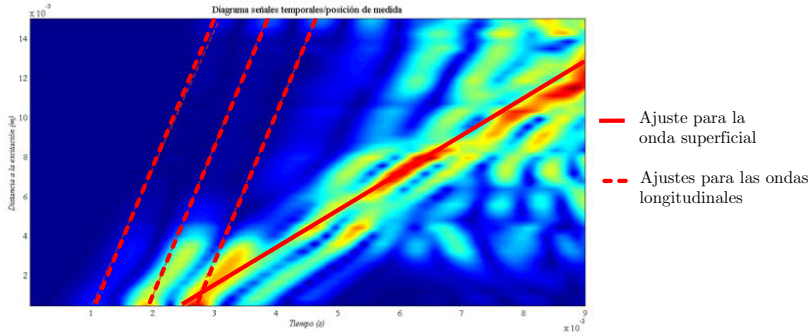


Figura 8.5: Diagrama necesario para calcular las componentes longitudinales.

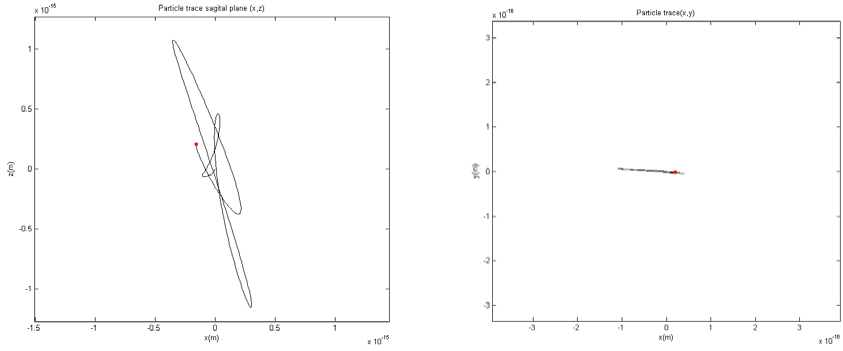


Figura 8.6: Izquierda: traza de partícula en el momento de propagarse una onda superficial en la dirección $-x$. Derecha: traza en el momento de propagarse una onda longitudinal en la dirección $-x$.

Podemos observar en la Fig. 8.6 como en la traza de la derecha, la partícula describe un movimiento elíptico, mientras que en la traza la de izquierda lo hace en la dirección de propagación de la onda.

A continuación mostramos en la Fig. 8.7 descriptivo en el que se representa el módulo del esfuerzo normal y en el que se aprecian las distintas ondas propagándose por el interior una naranja. Nótese la diferencia entre la longitud de onda y en amplitud de las vibraciones longitudinales y transversales.

Si representamos la posición de partícula podemos distinguir claramente la naturaleza de la vibración de los elementos. Nótese que en el aire exterior cercano a la

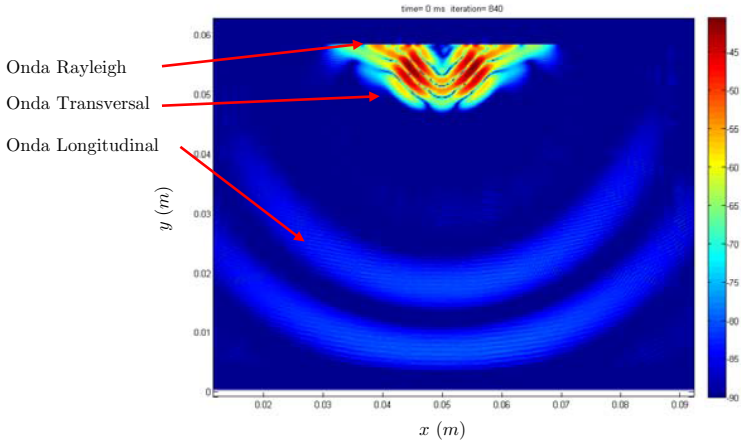


Figura 8.7: Módulo del esfuerzo normal en una sección de la naranja mostrando las distintas ondas generadas en la corteza da la naranja.

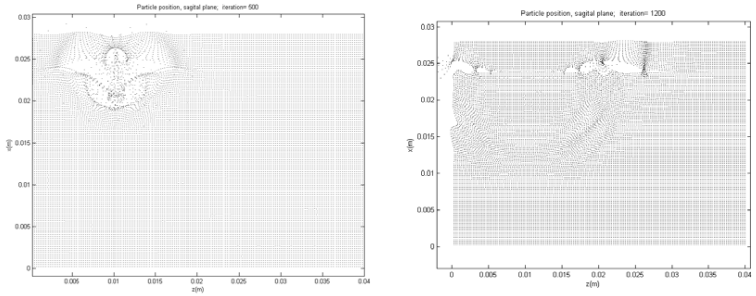
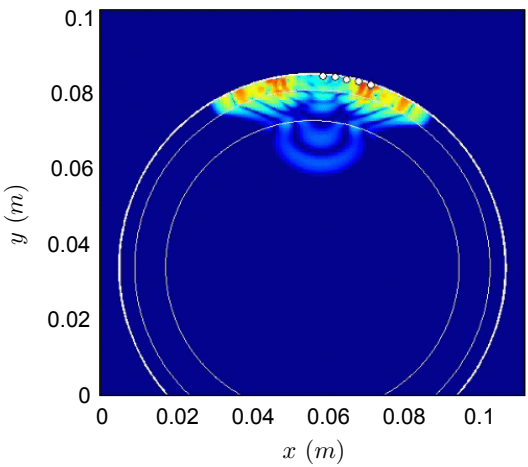


Figura 8.8: Posición de partícula en una sección de la naranja en distintos instantes de tiempo.

corteza se aprecian ondas evanescentes. La baja amplitud de las ondas longitudinales en el interior de la corteza impide distinguirlas en esta representación.

Por último, mostramos de manera descriptiva como las ondas no llegan a atravesar la naranja debido a la alta absorción del medio y a los bajos coeficientes de transmisión causados por la estratificación en capas de muy diferente impedancia acústica existentes en la corteza de la naranja. Debido a que el dominio a simular en este caso es mucho mayor el muestreo espacial es mucho más bajo, por lo que los resultados de esta simulación son sólo descriptivos. Nótese como las ondas transversales no son capaces de propagarse por el fluido interior.

Figura 8.9: Posición de partícula en una sección de la naranja en distintos instantes de tiempo. Módulo del esfuerzo normal en una sección de la naranja mostrando las distintas ondas generadas en la corteza da la naranja en los diferentes estratos.



Capítulo 9

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado con éxito un modelo numérico basado en diferencias finitas capaz de describir los fenómenos ondulatorios existentes en los tejidos vegetales. Dicho modelo pone de manifiesto la necesidad de parámetros elásticos dependientes de la frecuencia, por lo que no podrán usarse los medidos mediante los comunes ensayos de esfuerzo-deformación. Este aspecto puede ser de gran interés a la hora de desarrollar técnicas ultrasónicas para la caracterización elástica de tejidos tales como la elastografía.

Respecto de los resultados obtenidos, este trabajo revela que la naturaleza ondulatoria de la superficie de la naranja está gobernada en por ondas de Rayleigh, que han sido caracterizadas y comparadas con las medidas experimentales obteniendo ajustes satisfactorios. Las componentes longitudinales de las ondas en el tejido de la naranja no sin detectadas con facilidad en la superficie de esta, al igual que ocurría en el experimento. Aún así, el modelo presentado es una aproximación muy simple a los fenómenos existentes en los tejidos biológicos, ya que no se han introducido términos que describan las fuertes características viscoelásticas distintivas de los medios biológicos.

Noé Jiménez, © 2009 Universitat Politècnica de València

A
IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO FDTD EN EL MODELO DE FLUIDOS

En este anexo se detalla la implementación del método FDTD en diferentes sistemas de coordenadas. El modelo físico es el de fluidos, con y sin pérdidas. Se detalla también la introducción de las PML en los sistemas de coordenadas curvilíneas.

A.1 Sistema de coordenadas cartesianas 3D

El operador diferencial gradiente, ∇, en coordenadas cartesianas, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, viene dado por

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\,, \tag{A.1}$$

siendo $\hat{i}$ el vector unitario en la dirección i. Por otro lado, la divergencia en este sistema de coordenadas utilizando el operador gradiente y la definición de producto escalar

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\,. \tag{A.2}$$

Noé Jiménez, © 2009 Universitat Politècnica de València

De esta manera, en coordenadas cartesianas podemos reescribir las ecuaciones constitutivas del modelo de fluidos como:

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}\,, \tag{A.3}$$

$$\rho\frac{\partial u_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y}\,, \tag{A.4}$$

$$\rho\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z}\,, \tag{A.5}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\kappa\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\,, \tag{A.6}$$

donde v_i, $i = x, y, z$ es la componente ortogonal de velocidad de partícula. Siguiendo el mismo procedimiento discretizaremos las magnitudes en espacio y tiempo de acorde a la Fig. A.1.

Consecuentemente, las ecuaciones del modelo de fluidos en coordenadas cartesianas serán:

$$\rho\frac{v_x\big|^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j,k} - v_x\big|^{n-\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\Delta t} = -\frac{p\big|^{n}_{i+1,j,k} - p\big|^{n}_{i,j,k}}{\Delta x}, \tag{A.7}$$

(A.8)

$$\rho\frac{v_y\big|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k} - v_y\big|^{n-\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k}}{\Delta t} = -\frac{p\big|^{n}_{i,j+1,k} - p\big|^{n}_{i,j,k}}{\Delta y}, \tag{A.9}$$

(A.10)

$$\rho\frac{v_z\big|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j,k+\frac{1}{2}} - v_z\big|^{n-\frac{1}{2}}_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{p\big|^{n}_{i,j,k+1} - p\big|^{n}_{i,j,k}}{\Delta z}, \tag{A.11}$$

(A.12)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\kappa}\frac{p\big|^{n+1}_{i,j,k} - p\big|^{n}_{i,j,k}}{\Delta t} = &-\frac{v_x\big|^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j,k} - v_x\big|^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j,k}}{\Delta x} + \cdots \\ &-\frac{v_y\big|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k} - v_y\big|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j-\frac{1}{2},k}}{\Delta y} + \cdots \\ &-\frac{v_z\big|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j,k+\frac{1}{2}} - v_z\big|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j,k-\frac{1}{2}}}{\Delta z}.\end{aligned} \tag{A.13}$$

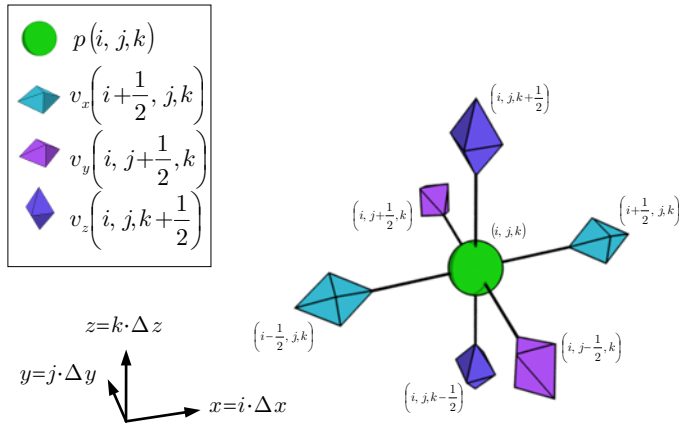


Figura A.1: Mallado del espacio 3D del modelo de fluidos; sistema de coordenadas cartesiano.

Por tanto, las ecuaciones de actualización quedarán como:

$$v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}} = v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\rho\Delta x}\left(p\big|_{i+1,j,k}^{n} - p\big|_{i,j,k}^{n}\right), \tag{A.14}$$

$$v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} = v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\rho\Delta y}\left(p\big|_{i,j+1,k}^{n} - p\big|_{i,j,k}^{n}\right), \tag{A.15}$$

$$v_z\big|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = v_z\big|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\rho\Delta z}\left(p\big|_{i,j,k+1}^{n} - p\big|_{i,j,k}^{n}\right), \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned} p\big|_{i,j,k}^{n+1} = p\big|_{i,j,k}^{n} - \kappa\Delta t\Bigg(&\frac{v_x\big|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}} - v_x\big|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \cdots \\ &+ \frac{v_y\big|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} - v_y\big|_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \frac{v_z\big|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_z\big|_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z}\Bigg). \end{aligned} \tag{A.17}$$

La implementación de ABC's tipo PML se realizará de forma similar a lo propuesta anteriormente, pero teniendo en cuenta que la descomposición de las componentes de presión ha de realizarse en tres dimensiones. En total aparecen 6 ecuaciones para discretizar.

La condición de estabilidad vendrá dada por

$$\mathrm{CFL} = c_{\max}\Delta t\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} \leq 1, \tag{A.18}$$

y si el mallado es equiespaciado, $\Delta h = \Delta x = \Delta y = \Delta z$, la condición de estabilidad se reduce a

$$\mathrm{CFL} = \frac{c_{\max}\Delta t\sqrt{3}}{\Delta h} \leq 1. \tag{A.19}$$

La dispersión numérica podemos evaluarla igualmente con el muestreo espacial, de manera que obtendremos valores aceptables para:

$$N_\lambda = \frac{c_{\min}}{f_{\max}\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}} \geq 10. \tag{A.20}$$

A.2 Sistema de coordenadas cartesianas polares

De igual forma, el gradiente en coordenadas polares, $\mathbf{r} = (r, \theta)$, es

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\,, \tag{A.21}$$

y la divergencia

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \nabla \cdot v = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)\,, \tag{A.22}$$

donde v_i, $i = r, \theta$ es la componente i de la velocidad de partícula. Para coordenadas polares las ecuaciones constitutivas del modelo de fluidos se expresan como:

$$\rho\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r}\,, \tag{A.23}$$

$$\rho\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\,, \tag{A.24}$$

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right). \tag{A.25}$$

De manera análoga se procederá a discretizar las ecuaciones (A.23-A.25), teniendo en cuenta que la componente de velocidad v_r no está definida para las posiciones enteras de i por estar las mallas al tresbolillo. Dicha componente de velocidad ha de ser aproximada como:

$$v_r|_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} + v_r|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{2}\,. \tag{A.26}$$

Así, las ecuaciones quedarán como:

$$\rho\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - v_r|_{i+\frac{1}{2},j}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{p|_{i+1,j}^{n} - p|_{i,j}^{n}}{\Delta r}, \tag{A.27}$$

$$\rho\frac{v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{1}{r}\frac{p|_{i,j+1}^{n} - p|_{i,j}^{n}}{\Delta \theta}, \tag{A.28}$$

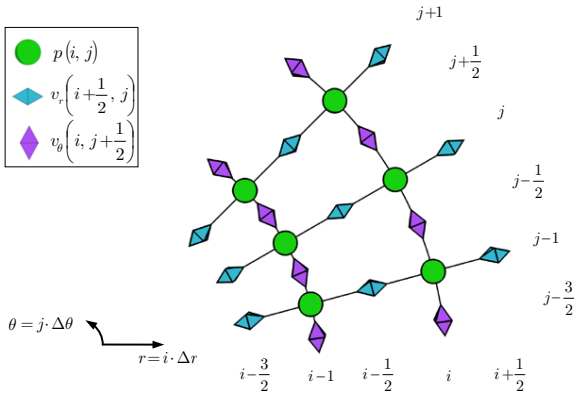


Figura A.2: Mallado del espacio 2D del modelo de fluidos; sistema de coordenadas polar.

$$\frac{1}{\kappa}\frac{p|^{n+1}_{i,j}-p|^{n}_{i,j}}{\Delta t}=-\frac{v_r|^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}-v_r|^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta r}+\frac{v_r|^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}+v_r|^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j}}{2r}+\cdots + \frac{v_\theta|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}-v_\theta|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j-\frac{1}{2}}}{r\Delta\theta}. \tag{A.29}$$

Despejando en función del campo desconocido (instante futuro), las ecuaciones de actualización en un sistema de coordenadas polares quedan como:

$$v_r|^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}=v_r|^{n-\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}-\frac{\Delta t}{\rho\Delta r}\left(p|^{n}_{i+1,j}-p|^{n}_{i,j}\right), \tag{A.30}$$

$$v_\theta|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}=v_\theta|^{n-\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}-\frac{\Delta t}{\rho\Delta\theta}\frac{1}{r}\left(p|^{n}_{i,j+1}-p|^{n}_{i,j}\right), \tag{A.31}$$

$$p|^{n+1}_{i,j}=p|^{n}_{i,j}-\kappa\Delta t\left(\frac{v_r|^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}-v_r|^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta r}+\frac{v_r|^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}+v_r|^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j}}{2r}+\cdots + \frac{v_\theta|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}-v_\theta|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j-\frac{1}{2}}}{r\Delta\theta}\right). \tag{A.32}$$

Para la implementación de las PML en este modelo se ha de descomponer el campo escalar de presión en sus componentes ficticias como:

$$p=p^r+p^\theta\,. \tag{A.33}$$

Así implementado las ABC como se describe en la Sección 5.2.a. obtendremos las siguientes ecuaciones:

$$\rho\left(\alpha_r\frac{\partial v_r}{\partial t}+\Omega_r v_r\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{A.34}$$

$$\rho\left(A_r\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+\Omega'_r v_\theta\right)=-\frac{\partial p}{\partial \theta}, \tag{A.35}$$

$$\frac{1}{\kappa}\left(\alpha_r\frac{\partial p^r}{\partial t}+\Omega_r p^r\right)=-\frac{\partial v_r}{\partial r}, \tag{A.36}$$

$$\frac{1}{\kappa}\left(A_r\frac{\partial p^\theta}{\partial t}+\Omega'_r p^\theta\right)=-v_r-\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}. \tag{A.37}$$

La condición de estabilidad vendrá dada por

$$\mathrm{CFL}=c_{\max}\Delta t\sqrt{\frac{1}{(\Delta r)^2}+\frac{1}{(\Delta r\Delta\theta_{\min})^2}}\leq 1, \tag{A.38}$$

donde podemos observar que el término $\sqrt{(\Delta r)^2+(\Delta r\Delta\theta_{\min})^2}$ es la diagonal más pequeña que podemos encontrar en las celdas trapezoidales de nuestro domino. La dispersión numérica podemos evaluarla igualmente con el muestreo espacial, de manera que obtendremos valores aceptables para:

$$N_\lambda\equiv\frac{c_{\min}}{f_{\max}\sqrt{(\Delta r)^2+(\Delta r\Delta\theta_{\max})^2}}\geq 10, \tag{A.39}$$

donde el término $\sqrt{(\Delta r)^2+(\Delta r\Delta\theta_{\max})^2}$ es la diagonal más grande que podemos encontrar en nuestro dominio.

A.3 Sistema de coordenadas cilíndricas

Definiendo el sistema de coordenadas cilíndricas como $\mathbf{r}=(r,\theta,z)$ de manera que r sea la distancia radial al centro de coordenadas, θ se corresponda al ángulo polar y z la componente de elevación, podemos escribir el operador gradiente como

$$\nabla=\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{A.40}$$

y la divergencia de la velocidad, $\mathbf{v}$, como

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=\nabla\cdot\mathbf{v}=\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(v_r+\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial v_z}{\partial z}, \tag{A.41}$$

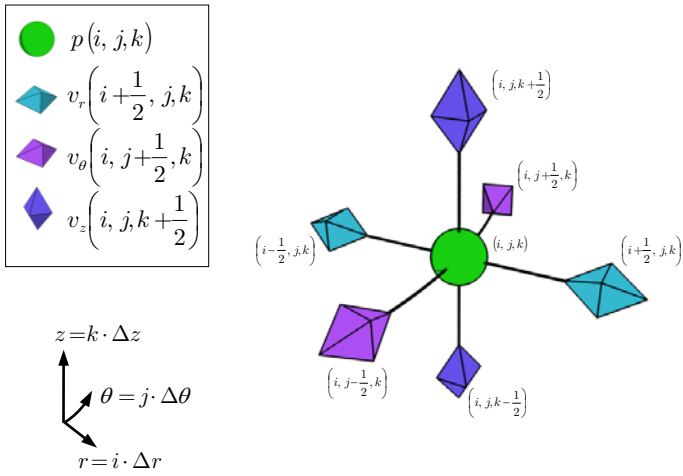


Figura A.3: Mallado del espacio 3D del modelo de fluidos; sistema de coordenadas cilíndrico.

donde v_i, $i = r, \theta, z$; es la componente i de la velocidad de partícula. Así, las relaciones constitutivas se pueden reescribir en coordenadas cilíndricas como:

$$\rho\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{A.42}$$

$$\rho\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}, \tag{A.43}$$

$$\rho\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{A.44}$$

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{A.45}$$

Utilizando un sistema de coordenadas cilíndrico y discretizando el espacio según la Fig. A.3, las ecuaciones discretizadas son:

$$\rho\frac{v_r|^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j,k} - v_r|^{n-\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\Delta t} = -\frac{p|^n_{i+1,j,k} - p|^n_{i,j,k}}{\Delta r}, \tag{A.46}$$

$$\rho\frac{v_\theta|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k} - v_\theta|^{n-\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k}}{\Delta t} = -\frac{p|^n_{i,j+1,k} - p|^n_{i,j,k}}{r\Delta\theta}, \tag{A.47}$$

$$\rho\frac{v_z|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j,k+\frac{1}{2}} - v_z|^{n-\frac{1}{2}}_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{p^n_{i,j,k+1} - p^n_{i,j,k}}{\Delta z}, \tag{A.48}$$

$$\frac{1}{\kappa}\frac{p|_{i,j,k}^{n+1}-p|_{i,j,k}^{n}}{\Delta t}=-\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}-v_r|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta r}+\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}+v_r|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{2r}+\cdots$$
$$+\frac{v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}-v_\theta|_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{r\Delta\theta}+\frac{v_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-v_z|_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z}. \tag{A.49}$$

Las ecuaciones de actualización serán entonces:

$$v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}=v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n-\frac{1}{2}}-\frac{\Delta t}{\rho\Delta r}\left(p|_{i+1,j,k}^{n}-p|_{i,j,k}^{n}\right), \tag{A.50}$$

$$v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}=v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}}-\frac{\Delta t}{\rho\Delta\theta}\frac{1}{r}\left(p|_{i,j+1,k}^{n}-p|_{i,j,k}^{n}\right), \tag{A.51}$$

$$v_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}=v_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}-\frac{\Delta t}{\rho\Delta z}\left(p|_{i,j,k+1}^{n}-p|_{i,j,k}^{n}\right), \tag{A.52}$$

$$p|_{i,j,k}^{n+1}=p|_{i,j,k}^{n}-\kappa\Delta t\left(\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}-v_r|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta r}+\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}+v_r|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{2r}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}-v_\theta|_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{r\Delta\theta}+\frac{v_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-v_z|_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z}\right). \tag{A.53}$$

Podemos observar que en estas ecuaciones existe una singularidad para $r=0$ lo que provoca que inestabilidad numérica en el método. Dicha singularidad existe para $i=0$, por lo que se puede evitar la inestabilidad terminando la malla con un elemento de presión en $r=0$ y a continuación los elementos de velocidad v_r a una distancia $\Delta r/2$ del centro. En cualquier caso, para el estudio aquí propuesto no es necesario este especial tratamiento ya que debido a la gran atenuación de los tejidos vegetales la onda nunca atraviesa el interior. Por ello, se acotará el dominio tanto radial como angular mediante una PML.

Para implementar la PML primero se descomponen los campos como $p=p^r+p^\theta+p^z$. Después, las ecuaciones quedan como:

$$\rho\left(\alpha_r\frac{\partial v_r}{\partial t}+\Omega_r v_r\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{A.54}$$

$$\rho\left(A_r\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+\Omega_r' v_\theta\right)=-\frac{\partial p}{\partial \theta}, \tag{A.55}$$

$$\rho\left(\alpha_r\frac{\partial v_z}{\partial t}+\Omega_r v_z\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{A.56}$$

$$\tag{A.57}$$

$$\frac{1}{\kappa}\left(\alpha_r\frac{\partial p^r}{\partial t}+\Omega_r p^r\right)=-\frac{\partial v_r}{\partial r}, \tag{A.58}$$

$$\frac{1}{\kappa}\left(A_r\frac{\partial p^\theta}{\partial t}+\Omega'_r p^\theta\right)=-v_r+\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}, \tag{A.59}$$

$$\frac{1}{\kappa}\left(\alpha_r\frac{\partial p^z}{\partial t}+\Omega_r p^z\right)=-\frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{A.60}$$

La condición de estabilidad vendrá dada por

$$\mathrm{CFL}=c_{\max}\Delta t\sqrt{\frac{1}{(\Delta r)^2}+\frac{1}{(\Delta r\Delta\theta_{\min})^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}}\leq 1, \tag{A.61}$$

donde podemos observar que el término $\sqrt{(\Delta r)^2+(\Delta r\Delta\theta_{\min})^2+(\Delta z)^2}$ es la diagonal más pequeña que podemos encontrar en las celdas de nuestro domino. La dispersión numérica se evalúa con el muestreo espacial, de manera que obtendremos valores aceptables para

$$N_\lambda=\frac{c_{\min}}{f_{\max}\sqrt{(\Delta r)^2+(\Delta r\Delta\theta_{\max})^2+(\Delta z)^2}}\geq 10, \tag{A.62}$$

donde el término $\sqrt{(\Delta r)^2+(\Delta r\Delta\theta_{\max})^2+(\Delta z)^2}$ es la diagonal más grande que podemos encontrar en nuestro dominio.

A.4 Sistema de coordenadas esféricas

Si definimos el sistema de coordenadas esférico $\mathbf{r}=(r,\theta,\varphi)$ de manera que r es la distancia radial, θ se corresponda con el ángulo de azimut y φ el de elevación. De esta manera, se define el gradiente como

$$\nabla=\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\hat{\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{A.63}$$

y la divergencia como

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=\operatorname{div}\mathbf{v}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 v_r}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sin\theta v_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}, \tag{A.64}$$

donde v_i, $i=r,\theta,\varphi$; es la componente de la magnitud vectorial velocidad de partícula. Así, las ecuaciones constitutivas se escriben en coordenadas esféricas

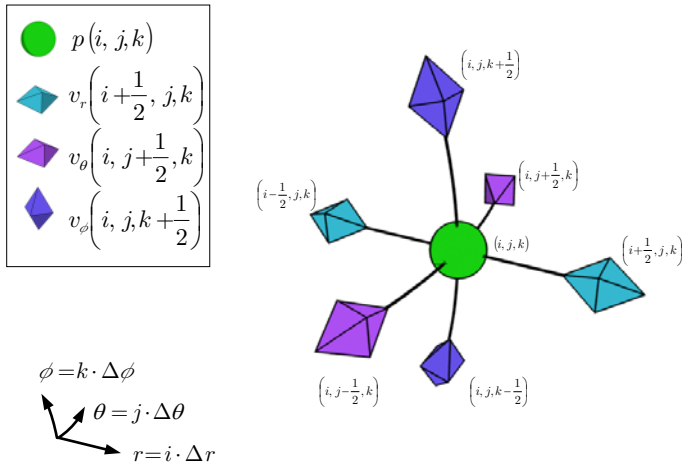


Figura A.4: Mallado del espacio 3D del modelo de fluidos; sistema de coordenadas esférico.

como:

$$\rho\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{A.65}$$

$$\rho\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}, \tag{A.66}$$

$$\rho\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi}, \tag{A.67}$$

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(2v_r + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right). \tag{A.68}$$

Análogamente, para obtener un método numérico para la simulación de fluidos en coordenadas esféricas se discretizarán las ecuaciones anteriores según el esquema Fig. A.4. Las ecuaciones discretas quedan como:

$$\rho\frac{v_r\big|^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j,k} - v_r\big|^{n-\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\Delta t} = -\frac{p|^n_{i+1,j,k} - p|^n_{i,j,k}}{\Delta r}, \tag{A.69}$$

$$\rho\frac{v_\theta\big|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k} - v_\theta\big|^{n-\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k}}{\Delta t} = -\frac{1}{r}\frac{p|^n_{i,j+1,k} - p|^n_{i,j,k}}{\Delta\theta}, \tag{A.70}$$

$$\rho\frac{v_\varphi\big|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k} - v_\varphi\big|^{n-\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k}}{\Delta t} = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{p|^n_{i,j+1,k} - p|^n_{i,j,k}}{\Delta\varphi}, \tag{A.71}$$

$$\frac{1}{\kappa}\frac{p|_{i,j,k}^{n+1}-p|_{i,j,k}^{n}}{\Delta t}=-\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}-v_r|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta r}+\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{r}+\frac{v_r|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{r}+\cdots$$
$$+\frac{\cot\theta}{r}\frac{v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}-v_\theta|_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\theta}+\frac{1}{r\sin\theta_j}\frac{v_\varphi|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-v_\varphi|_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\varphi}. \tag{A.72}$$

Las ecuaciones de actualización serán:

$$v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}=v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n-\frac{1}{2}}-\frac{\Delta t}{\rho\Delta r}\left(p|_{i+1,j,k}^{n}-p|_{i,j,k}^{n}\right), \tag{A.73}$$

$$v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}=v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}}-\frac{\Delta t}{\rho\Delta\theta}\frac{1}{r}\left(p|_{i,j+1,k}^{n}-p_{i,j,k}^{n}\right), \tag{A.74}$$

$$v_\varphi|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}=v_\varphi|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}}-\frac{\Delta t}{\rho\Delta\varphi}\frac{1}{r\sin\theta_{j+\frac{1}{2}}}\left(p|_{i,j+1,k}^{n}-p|_{i,j,k}^{n}\right), \tag{A.75}$$

$$p|_{i,j,k}^{n+1}=p|_{i,j,k}^{n}-\kappa\Delta t\left(\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}-v_r|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta r}-\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{r}-\frac{v_r|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{r}\right.$$
$$\left.-\frac{\cot\theta_j}{r}\frac{v_\theta|_{i,j\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}-v_\theta|_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\theta}-\frac{1}{r\sin\theta_j}\frac{v_\varphi|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-v_\varphi|_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\varphi}\right). \tag{A.76}$$

En esta discretización existe una singularidad similar a la existente en coordenadas cilíndricas para $r=0$ que puede ser tratada análogamente. Por otro lado, las expresiones anteriores tienden a infinito para $\sin\theta=0$ y para $\cot\theta=0$, es decir, en ambos casos cuando $\theta=0$. En el dominio discreto, ello sucede tanto como para $j=0$ como para $j+1/2=0$ por lo que el problema no podrá solucionarse mediante la simple colocación de elementos de presión o velocidad. En principio para este trabajo no será necesario tratar esta singularidad ya que trabaja en un dominio acotado y se evitará incluir $\theta=0$ o su equivalente en coordenadas cartesianas, el propio eje z.

Para la implementación de la PML el campo de presión solo se ha de descomponer en dos componentes ficticias, $p=p^r+p^{\theta\varphi}$, por lo que sólo necesitaremos 5

incógnitas en lugar de las 6 necesarias para coordenadas cartesianas:

$$\rho\left(\alpha_r\frac{\partial v_r}{\partial t}+\Omega_r v_r\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{A.77}$$

$$\rho\left(A_r\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+\Omega'_r v_\theta\right)=-\frac{\partial p}{\partial \varphi}, \tag{A.78}$$

$$\rho\left(A_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+\Omega'_r v_\varphi\right)=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi}, \tag{A.79}$$

$$\frac{1}{\kappa}\left(\alpha_r\frac{\partial p^r}{\partial t}+\Omega_r p^r\right)=-\frac{\partial v_r}{\partial r}, \tag{A.80}$$

$$\frac{1}{\kappa}\left(A_r\frac{\partial p^{\theta\varphi}}{\partial t}+\Omega'_r p^{\theta\varphi}\right)=-\left(2v_r+\cot\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right). \tag{A.81}$$

La condición de estabilidad vendrá dada por:

$$\mathrm{CFL}=c_{l,\max}\Delta t\sqrt{\frac{1}{(\Delta r)^2}+\frac{1}{(\Delta r\Delta\theta_{\min}\sin\varphi_{\min})^2}+\frac{1}{(\Delta r\Delta\varphi_{\min})^2}}\leq 1, \tag{A.82}$$

donde el término $\sqrt{(\Delta r)^2+(\Delta r\Delta\theta_{\min}\sin\varphi_{\min})^2+(\Delta r\Delta\varphi_{\min})^2}$ es la diagonal más pequeña que podemos encontrar en las celdas de nuestro domino. La dispersión numérica podemos evaluarla igualmente con el muestreo espacial, de manera que obtendremos valores aceptables para:

$$N_\lambda=\frac{c_{\min}}{f_{\max}\sqrt{(\Delta r)^2+(\Delta r\Delta\theta_{\max}\sin\varphi_{\max})^2+(\Delta r\Delta\varphi_{\max})^2}}\geq 10, \tag{A.83}$$

donde el término $\sqrt{(\Delta r)^2+(\Delta r\Delta\theta_{\max}\sin\varphi_{\max})^2+(\Delta r\Delta\varphi_{\max})^2}$ es la diagonal más grande que podemos encontrar en nuestro dominio.

B
IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO FDTD EN EL MODELO DE SÓLIDOS

En este anexo se detalla la implementación del método FDTD en diferentes sistemas de coordenadas. El modelo físico es el de fluidos, con y sin pérdidas. Se detalla también la introducción de las PML en los sistemas de coordenadas curvilíneas.

B.1 Sistema de coordenadas cartesianas

Definiendo la velocidad $\mathbf{v}$ y el esfuerzo $\boldsymbol{\sigma}$ en coordenadas cartesianas como:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \tag{B.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \tag{B.2}$$

Noé Jiménez, © 2009 Universitat Politècnica de València

donde σ_{ii}, para $i = x, y, z$ son los esfuerzos normales y σ_{ij}, para $i = x, y, z$; $j = x, y, z$ con $i \neq j$, son los esfuerzos de cizalla. Es importante señalar que solo existen 6 componentes independientes ya que para sólidos isotrópicos $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ Auld (1973). Utilizando el operador gradiente y la divergencia en coordenadas cartesianas 3D las ecuaciones constitutivas se pueden reescribir como:

$$\rho \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \nabla \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \tag{B.3}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{xx} & \dot{\sigma}_{yz} & \dot{\sigma}_{zx} \\ \dot{\sigma}_{xy} & \dot{\sigma}_{yy} & \dot{\sigma}_{zy} \\ \dot{\sigma}_{xz} & \dot{\sigma}_{yz} & \dot{\sigma}_{zz} \end{bmatrix} = \lambda \bar{\mathbf{I}} \nabla \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \mu \left(\nabla \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \nabla \right), \tag{B.4}$$

donde $\dot{}$ indica $\partial/\partial t$. Así, resolviendo en componentes cartesianas para la componente $i = x, y, z$ de velocidad de partícula v_i

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}, \tag{B.5}$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z}, \tag{B.6}$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y}, \tag{B.7}$$

para la componente $i = x, y, z$ de esfuerzo normal σ_{ii}

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z}, \tag{B.8}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z}, \tag{B.9}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y}, \tag{B.10}$$

y para la componente $i = x, y, z$; $j = x, y, z$; $i \neq j$ de esfuerzo de cizalla σ_{ij}

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \tag{B.11}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right), \tag{B.12}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right). \tag{B.13}$$

Para la implementación de las PML en este sistema de coordenadas se ha de realizar la descomposición de las distintas componentes de los campos. Sin la descomposición tenemos un sistema de 8 ecuaciones con 8 incógnitas; al descomponer

los campos obtenemos un sistema de 32 ecuaciones con 32 incógnitas:

$$v_x = v_x^x + v_x^y + v_x^z, \tag{B.14}$$
$$v_y = v_y^x + v_y^y + v_y^z, \tag{B.15}$$
$$v_z = v_z^x + v_z^y + v_z^z, \tag{B.16}$$
$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^x + \sigma_{xx}^y + \sigma_{xx}^z, \tag{B.17}$$
$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^x + \sigma_{yy}^y + \sigma_{yy}^z, \tag{B.18}$$
$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^x + \sigma_{zz}^y + \sigma_{zz}^z, \tag{B.19}$$
$$\sigma_{xy} = \sigma_{xy}^x + \sigma_{xy}^y, \tag{B.20}$$
$$\sigma_{yz} = \sigma_{yz}^y + \sigma_{yz}^z, \tag{B.21}$$
$$\sigma_{xz} = \sigma_{xz}^x + \sigma_{xz}^z, \tag{B.22}$$

para las componentes $i = x, y, z$ de velocidad de partícula v_i

$$\rho\left(\alpha_x \frac{\partial v_x^x}{\partial t} + \Omega_x v_x^x\right) = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}, \tag{B.23}$$
$$\rho\left(\alpha_y \frac{\partial v_x^y}{\partial t} + \Omega_y v_x^y\right) = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}, \tag{B.24}$$
$$\rho\left(\alpha_z \frac{\partial v_x^z}{\partial t} + \Omega_z v_x^z\right) = \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \tag{B.25}$$
$$\rho\left(\alpha_x \frac{\partial v_y^x}{\partial t} + \Omega_x v_y^x\right) = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x}, \tag{B.26}$$
$$\rho\left(\alpha_y \frac{\partial v_y^y}{\partial t} + \Omega_y v_y^y\right) = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}, \tag{B.27}$$
$$\rho\left(\alpha_z \frac{\partial v_y^z}{\partial t} + \Omega_z v_y^z\right) = \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \tag{B.28}$$
$$\rho\left(\alpha_x \frac{\partial v_z^x}{\partial t} + \Omega_x v_z^x\right) = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x}, \tag{B.29}$$
$$\rho\left(\alpha_y \frac{\partial v_z^y}{\partial t} + \Omega_y v_z^y\right) = \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y}, \tag{B.30}$$
$$\rho\left(\alpha_z \frac{\partial v_z^z}{\partial t} + \Omega_z v_z^z\right) = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}, \tag{B.31}$$

para las componentes $i = x, y, z$ de esfuerzo normal σ_{ii}

$$\alpha_x \frac{\partial \sigma_{xx}^x}{\partial t} + \Omega_x \sigma_{xx}^x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x}, \tag{B.32}$$

$$\alpha_y \frac{\partial \sigma_{xx}^y}{\partial t} + \Omega_y \sigma_{xx}^y = \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y}, \tag{B.33}$$

$$\alpha_z \frac{\partial \sigma_{xx}^z}{\partial t} + \Omega_z \sigma_{xx}^z = \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z}, \tag{B.34}$$

$$\alpha_x \frac{\partial \sigma_{yy}^x}{\partial t} + \Omega_x \sigma_{yy}^x = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x}, \tag{B.35}$$

$$\alpha_y \frac{\partial \sigma_{yy}^y}{\partial t} + \Omega_y \sigma_{yy}^y = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_y}{\partial y}, \tag{B.36}$$

$$\alpha_z \frac{\partial \sigma_{yy}^z}{\partial t} + \Omega_z \sigma_{yy}^z = \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z}, \tag{B.37}$$

$$\alpha_x \frac{\partial \sigma_{zz}^x}{\partial t} + \Omega_x \sigma_{zz}^x = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x}, \tag{B.38}$$

$$\alpha_y \frac{\partial \sigma_{zz}^y}{\partial t} + \Omega_y \sigma_{zz}^y = \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y}, \tag{B.39}$$

$$\alpha_z \frac{\partial \sigma_{zz}^z}{\partial t} + \Omega_z \sigma_{zz}^z = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z}, \tag{B.40}$$

y para las componentes $i = x, y, z, j = x, y, z; i \neq j$ de esfuerzo de cizalla σ_{ij}

$$\alpha_x \frac{\partial \sigma_{xy}^x}{\partial t} + \Omega_x \sigma_{xy}^x = \mu \frac{\partial v_y}{\partial x}, \tag{B.41}$$

$$\alpha_y \frac{\partial \sigma_{xy}^y}{\partial t} + \Omega_y \sigma_{xy}^y = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}, \tag{B.42}$$

$$\alpha_y \frac{\partial \sigma_{yz}^y}{\partial t} + \Omega_y \sigma_{yz}^y = \mu \frac{\partial v_z}{\partial y}, \tag{B.43}$$

$$\alpha_z \frac{\partial \sigma_{yz}^z}{\partial t} + \Omega_z \sigma_{yz}^z = \mu \frac{\partial v_y}{\partial z}, \tag{B.44}$$

$$\alpha_x \frac{\partial \sigma_{zx}^x}{\partial t} + \Omega_x \sigma_{zx}^x = \mu \frac{\partial v_z}{\partial x}, \tag{B.45}$$

$$\alpha_z \frac{\partial \sigma_{zx}^z}{\partial t} + \Omega_z \sigma_{zx}^z = \mu \frac{\partial v_x}{\partial z}. \tag{B.46}$$

La discretización de los campos de velocidad y esfuerzo de las ecuaciones anteriores se realizará acorde al esquema mostrado en Fig. B.1.

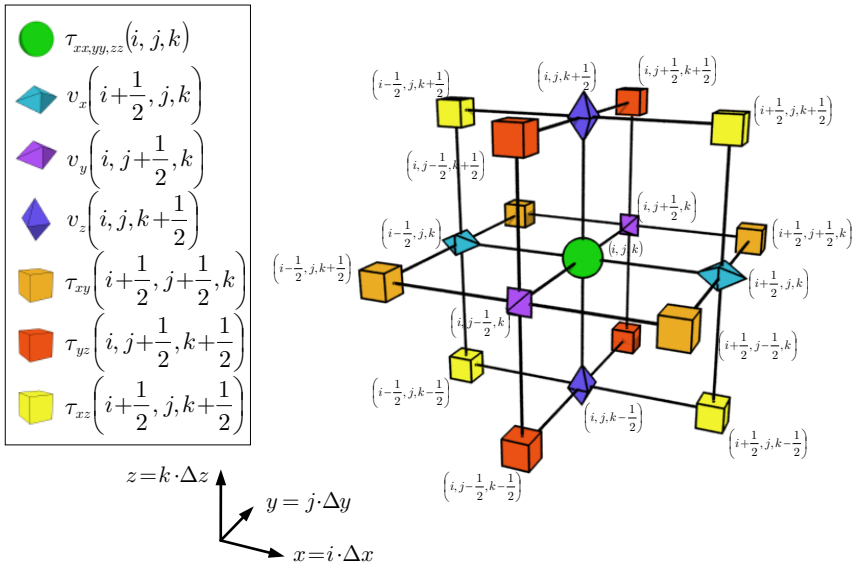


Figura B.1: Mallado del espacio 3D del modelo de sólidos; sistema de coordenadas cartesiano.

Así, la discretización de las expresiones sin PML por medio de diferencias finitas será para la componente $i = x, y, z$ de velocidad de partícula v_i

$$\begin{aligned}\rho\frac{v_x|^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j,k}-v_x|^{n-\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\Delta t}=&\frac{\sigma_{xx}|^{n}_{i+1,j,k}-\sigma_{xx}|^{n}_{i,j,k}}{\Delta x}+\cdots\\&+\frac{\sigma_{xy}|^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}-\sigma_{xy}|^{n}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}}{\Delta y}+\cdots\\&+\frac{\sigma_{zx}|^{n}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}-\sigma_{zx}|^{n}_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}}{\Delta z},\end{aligned}\tag{B.47}$$

$$\begin{aligned}\rho\frac{v_y|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k}-v_y|^{n-\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k}}{\Delta t}=&\frac{\sigma_{yy}|^{n}_{i,j+1,k}-\sigma_{yy}|^{n}_{i,j,k}}{\Delta y}+\cdots\\&+\frac{\sigma_{yx}|^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}-\sigma_{xy}|^{n}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}{\Delta x}+\cdots\\&+\frac{\sigma_{zy}|^{n}_{i,j+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}}-\sigma_{zy}|^{n}_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}{\Delta z},\end{aligned}\tag{B.48}$$

$$\rho\frac{v_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-v_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}=\frac{\sigma_{zz}|_{i,j,k+1}^{n}-\sigma_{zz}|_{i,j,k}^{n}}{\Delta z}+\cdots$$
$$+\frac{\sigma_{zx}|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n}-\sigma_{zx}|_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta x}+\cdots$$
$$+\frac{\sigma_{yz}|_{i,j+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}}^{n}-\sigma_{yz}|_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta y}, \tag{B.49}$$

para las componentes $i=x,y,z$ de esfuerzo normal σ_{ii}

$$\frac{\sigma_{xx}|_{i,j,k}^{n+1}-\sigma_{xx}|_{i,j,k}^{n}}{\Delta t}=(\lambda+2\mu)\frac{v_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}-v_x|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}+\cdots$$
$$+\lambda\frac{v_y|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}-v_y|_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y}+\cdots$$
$$+\lambda\frac{v_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-v_z|_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z}, \tag{B.50}$$

$$\frac{\sigma_{yy}|_{i,j,k}^{n+1}-\sigma_{yy}|_{i,j,k}^{n}}{\Delta t}=(\lambda+2\mu)\frac{v_y|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}-v_y|_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y}+\cdots$$
$$+\lambda\frac{v_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}-v_x|^{n+\frac{1}{2}}i-\frac{1}{2},j,k}{\Delta x}+\cdots$$
$$+\lambda\frac{v_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-v_z|_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z}, \tag{B.51}$$

$$\frac{\sigma_{zz}|_{i,j,k}^{n+1}-\sigma_{zz}|_{i,j,k}^{n}}{\Delta t}=(\lambda+2\mu)\frac{v_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-v_z|_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z}+\cdots$$
$$+\lambda\frac{v_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}-v_x|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}+\cdots$$
$$+\lambda\frac{v_y|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}-v_y|_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y}, \tag{B.52}$$

y para las componentes $i=x,y,z;\ j=x,y,z;\ i\neq j$ de esfuerzo de cizalla σ_{ij}

$$\frac{\sigma_{xy}|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+1}-\sigma_{xy}|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n}}{\Delta t}=+\mu\frac{v_x|_{i+\frac{1}{2},j+1,k}^{n+\frac{1}{2}}-v_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y}+\cdots$$
$$+\mu\frac{v_y|_{i+1,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}-v_y|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \tag{B.53}$$

$$\frac{\sigma_{yz}|^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \sigma_{yz}|^{n}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = + \mu \frac{v_z|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+1,k+\frac{1}{2}} - v_z|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \cdots + \mu \frac{v_y|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k+1} - v_y|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k}}{\Delta z}, \tag{B.54}$$

$$\frac{\sigma_{zx}|^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - \sigma_{zx}|^{n}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = + \mu \frac{v_z|^{n+\frac{1}{2}}_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} - v_z|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \cdots + \mu \frac{v_x|^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j,k+1} - v_x|^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\Delta z}. \tag{B.55}$$

Las condiciones de estabilidad y dispersión se calculará de la misma manera que para el método de fluidos, pero teniendo en cuenta que las velocidades máximas están gobernadas por las ondas longitudinales y las velocidades mínimas por las transversales. As su vez, se tendrán en cuenta las condiciones de estabilidad debidas a las heterogeneidades del medio.

B.2 Sistema de coordenadas polares

En coordenadas polares, $\mathbf{r} = (r, \theta)$, la relación entre esfuerzo y velocidad de partícula será para v_i, para las componentes $i = r, \theta$, como:

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r}, \tag{B.56}$$

$$\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\frac{\sigma_{r\theta}}{r}, \tag{B.57}$$

para la componente $i = r, \theta$ de esfuerzo normal σ_{ii}

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v_r}{\partial r} + \lambda\left(\frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right), \tag{B.58}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu)\left(\frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right) + \lambda\frac{\partial v_r}{\partial r}, \tag{B.59}$$

y para la única componente de esfuerzo de cizalla $\sigma_{r\theta}$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right). \tag{B.60}$$

Para la implementación de las PML mediante el método *complex coordinate stretching* la descomposición de los campos será

$$v_r = v_r^r + v_r^\theta, \qquad v_\theta = v_\theta^r + v_\theta^\theta, \tag{B.61}$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^r + \sigma_{rr}^\theta, \qquad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^r + \sigma_{\theta\theta}^\theta, \qquad \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta}^r + \sigma_{r\theta}^\theta. \tag{B.62}$$

Y después, para la componente de velocidad v_i para $i = r, \theta$ obtenemos

$$\rho\left(\alpha_r \frac{\partial v_r^r}{\partial t} + \Omega_r v_r^r\right) = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}, \tag{B.63}$$

$$\rho\left(A_r \frac{\partial v_r^\theta}{\partial t} + \Omega_r' v_r^\theta\right) = \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}, \tag{B.64}$$

$$\rho\left(\alpha_r \frac{\partial v_\theta^r}{\partial t} + \Omega_r v_\theta^r\right) = \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r}, \tag{B.65}$$

$$\rho\left(A_r \frac{\partial v_\theta^\theta}{\partial t} + \Omega_r' v_\theta^\theta\right) = \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\sigma_{r\theta}, \tag{B.66}$$

para la componente $i = r, \theta$ de esfuerzo normal σ_{ii}

$$\alpha_r \frac{\partial \sigma_{rr}^r}{\partial t} + \Omega_r \sigma_{rr}^r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_r}{\partial r}, \tag{B.67}$$

$$A_r \frac{\partial \sigma_{rr}^\theta}{\partial t} + \Omega_r' \sigma_{rr}^\theta = \lambda\left(v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right), \tag{B.68}$$

$$\alpha_r \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^r}{\partial t} + \Omega_r \sigma_{\theta\theta}^r = \lambda \frac{\partial v_r}{\partial r}, \tag{B.69}$$

$$A_r \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^\theta}{\partial t} + \Omega_r' \sigma_{\theta\theta}^\theta = (\lambda + 2\mu)\left(v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right), \tag{B.70}$$

y para la componente de esfuerzo de cizalla $\sigma_{r\theta}$

$$\alpha_r \frac{\partial \sigma_{r\theta}^r}{\partial t} + \Omega_r \sigma_{r\theta}^r = \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial r}, \tag{B.71}$$

$$A_r \frac{\partial \sigma_{r\theta}^\theta}{\partial t} + \Omega_r' \sigma_{r\theta}^\theta = \mu\left(v_\theta + \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right). \tag{B.72}$$

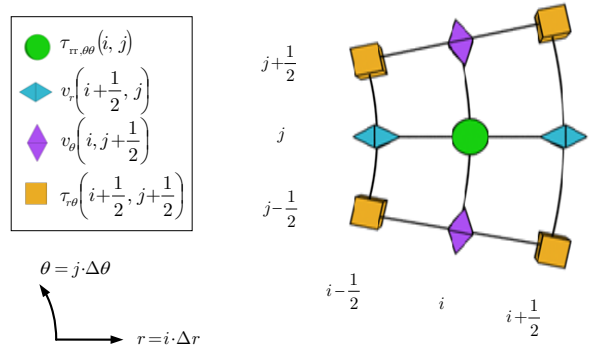


Figura B.2: Mallado del espacio 2D del modelo de sólidos; sistema de coordenadas polares.

La discretización en este sistema de coordenadas se acorde a Fig. B.2 será, Para la componente $i = r, \theta$ de velocidad v_i

$$\begin{aligned}\rho\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - v_r|_{i+\frac{1}{2},j}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} =& \frac{\sigma_{rr}|_{i+1,j}^{n} - \sigma_{rr}|_{i,j}^{n}}{\Delta r} + \frac{\sigma_{r\theta}|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n} - \sigma_{r\theta}|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n}}{r\Delta\theta} + \cdots \\ &+ \frac{\sigma_{rr}|_{i+1,j}^{n} + \sigma_{rr}|_{i,j}^{n}}{2r} - \frac{\sigma_{\theta\theta}|_{i+1,j}^{n} + \sigma_{\theta\theta}|_{i,j}^{n}}{2r},\end{aligned} \tag{B.73}$$

$$\begin{aligned}\rho\frac{v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} =& \frac{\sigma_{r\theta}|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n} - \sigma_{r\theta}|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta r} + \frac{\sigma_{\theta\theta}|_{i,j+1}^{n} - \sigma_{r\theta}|_{i,j}^{n}}{r\Delta\theta} + \cdots \\ &+ \frac{\sigma_{r\theta}|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n} + \sigma_{r\theta}|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n}}{r},\end{aligned} \tag{B.74}$$

para la componente $i = r, \theta$ de esfuerzo normal σ_{ii}

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{rr}|_{i,j}^{n+1} - \sigma_{rr}|_{i,j}^{n}}{\Delta t} =& (\lambda + 2\mu)\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - v_r|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta r} + \cdots \\ &+ \frac{\lambda}{r}\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} + v_r|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{2} + \cdots \\ &+ \frac{\lambda}{r}\frac{v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_\theta|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\theta},\end{aligned} \tag{B.75}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{\theta\theta}|_{i,j}^{n+1} - \sigma_{\theta\theta}|_{i,j}^{n}}{\Delta t} =& \frac{\lambda + 2\mu}{r}\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} + v_r|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{2} + \cdots \\ &+ \frac{\lambda + 2\mu}{r}\frac{v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_\theta|_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\theta} + \cdots \\ &+ \lambda\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - v_r|_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta r},\end{aligned} \tag{B.76}$$

y para la componente de esfuerzo de cizalla $\sigma_{r\theta}$

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{r\theta}|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \sigma_{r\theta}|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta t} =& \mu\frac{v_\theta|_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta r} + \cdots \\ &+ \mu\frac{v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + v_\theta|_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{2r} + \cdots \\ &+ \mu\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n+\frac{1}{2}} - v_r|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{r\Delta\theta}.\end{aligned} \tag{B.77}$$

Las condiciones de estabilidad y dispersión se calcularán de la misma manera que para el método de fluidos, pero teniendo en cuenta que las velocidades máximas están gobernadas por las ondas longitudinales y las velocidades mínimas por las transversales.

B.3 Sistema de coordenadas cilíndricas

Análogamente al caso de fluidos, para obtener las ecuaciones para el modelo de propagación de ondas elásticas en sólidos en coordenadas cilíndricas haremos uso del operador gradiente y de la divergencia en coordenadas cilíndricas. Así, la relación entre velocidad y esfuerzo se puede expresar en función de $\mathbf{r} = (r, \theta, z)$ para las componentes de velocidad cómo:

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r}, \tag{B.78}$$

$$\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r}, \tag{B.79}$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r}, \tag{B.80}$$

para las componentes de esfuerzo normal como:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v_r}{\partial r} + \lambda\left(\frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right), \tag{B.81}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu)\left(\frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right) + \lambda\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right), \tag{B.82}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right), \tag{B.83}$$

y para las componentes de esfuerzo de cizalla como:

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r}\right), \tag{B.84}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right), \tag{B.85}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial t} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right). \tag{B.86}$$

Para la implementación de las PML en primer lugar se descomponen los campos como:

$$\begin{aligned}
v_r &= v_r^r + v_r^\theta + v_r^z, & v_\theta &= v_\theta^r + v_\theta^\theta + v_\theta^z, & v_z &= v_z^r + v_z^\theta + v_z^z.\\
\sigma_{rr} &= \sigma_{rr}^r + \sigma_{rr}^\theta + \sigma_{rr}^z, & \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\theta\theta}^r + \sigma_{\theta\theta}^\theta + \sigma_{\theta\theta}^z, & \sigma_{zz} &= \sigma_{zz}^r + \sigma_{zz}^\theta + \sigma_{zz}^z,\\
\sigma_{r\theta} &= \sigma_{r\theta}^r + \sigma_{r\theta}^\theta, & \sigma_{\theta z} &= \sigma_{\theta z}^\theta + \sigma_{\theta z}^z, & \sigma_{rz} &= \sigma_{rz}^r + \sigma_{rz}^z,
\end{aligned} \tag{B.87}$$

y en segundo lugar se expresan las ecuaciones constitutivas como:

$$\rho\left(\alpha_r\frac{\partial v_r^r}{\partial t}+\Omega_r v_r^r\right)=\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}, \tag{B.88}$$

$$\rho\left(A_r\frac{\partial v_r^\theta}{\partial t}+\Omega_r' v_r^\theta\right)=\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta}+\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}, \tag{B.89}$$

$$\rho\left(\alpha_z\frac{\partial v_r^z}{\partial t}+\Omega_z v_r^z\right)=\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z}, \tag{B.90}$$

$$\tag{B.91}$$

$$\rho\left(\alpha_r\frac{\partial v_\theta^r}{\partial t}+\Omega_r v_\theta^r\right)=\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r}, \tag{B.92}$$

$$\rho\left(A_r\frac{\partial v_\theta^\theta}{\partial t}+\Omega_r' v_\theta^\theta\right)=\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}+2\sigma_{r\theta}, \tag{B.93}$$

$$\rho\left(\alpha_z\frac{\partial v_\theta^z}{\partial t}+\Omega_z v_\theta^z\right)=\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z}, \tag{B.94}$$

$$\tag{B.95}$$

$$\rho\left(\alpha_r\frac{\partial v_z^r}{\partial t}+\Omega_r v_z^r\right)=\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r}, \tag{B.96}$$

$$\rho\left(A_r\frac{\partial v_z^\theta}{\partial t}+\Omega_r' v_z^\theta\right)=\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta}+\sigma_{rz}, \tag{B.97}$$

$$\rho\left(\alpha_z\frac{\partial v_z^z}{\partial t}+\Omega_z v_z^z\right)=\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}, \tag{B.98}$$

$$\tag{B.99}$$

$$\alpha_r\frac{\partial \sigma_{rr}^r}{\partial t}+\Omega_r\sigma_{rr}^r=(\lambda+2\mu)\frac{\partial v_r}{\partial r}, \tag{B.100}$$

$$A_r\frac{\partial \sigma_{rr}^\theta}{\partial t}+\Omega_r'\sigma_{rr}^\theta=\lambda\left(v_r+\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right), \tag{B.101}$$

$$\alpha_z\frac{\partial \sigma_{rr}^z}{\partial t}+\Omega_z\sigma_{rr}^z=\lambda\frac{\partial v_z}{\partial z}, \tag{B.102}$$

$$\alpha_r\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^r}{\partial t}+\Omega_r\sigma_{\theta\theta}^r=\lambda\frac{\partial v_r}{\partial r}, \tag{B.103}$$

$$A_r\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^\theta}{\partial t}+\Omega_r'\sigma_{\theta\theta}^\theta=(\lambda+2\mu)\left(v_r+\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right), \tag{B.104}$$

$$\alpha_z\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^z}{\partial t}+\Omega_z\sigma_{\theta\theta}^z=\lambda\frac{\partial v_z}{\partial z}, \tag{B.105}$$

$$\alpha_r \frac{\partial \sigma_{zz}^r}{\partial t} + \Omega_r \sigma_{zz}^r = \lambda \frac{\partial v_r}{\partial r}, \tag{B.106}$$

$$A_r \frac{\partial \sigma_{zz}^\theta}{\partial t} + \Omega_r' \sigma_{zz}^\theta = v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}, \tag{B.107}$$

$$\alpha_z \frac{\partial \sigma_{zz}^z}{\partial t} + \Omega_z \sigma_{zz}^z = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z}, \tag{B.108}$$

$$\alpha_r \frac{\partial \sigma_{r\theta}^r}{\partial t} + \Omega_r \sigma_{r\theta}^r = \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial r}, \tag{B.109}$$

$$A_r \frac{\partial \sigma_{r\theta}^\theta}{\partial t} + \Omega_r' \sigma_{r\theta}^\theta = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right), \tag{B.110}$$

$$A_r \frac{\partial \sigma_{\theta z}^\theta}{\partial t} + \Omega_r' \sigma_{\theta z}^\theta = \mu \frac{\partial v_z}{\partial \theta}, \tag{B.111}$$

$$\alpha_z \frac{\partial \sigma_{\theta z}^z}{\partial t} + \Omega_z \sigma_{\theta z}^z = \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial z}, \tag{B.112}$$

$$\alpha_r \frac{\partial \sigma_{rz}^r}{\partial t} + \Omega_r \sigma_{rz}^r = \mu \frac{\partial v_z}{\partial r}, \tag{B.113}$$

$$\alpha_z \frac{\partial \sigma_{rz}^z}{\partial t} + \Omega_z \sigma_{rz}^z = \mu \frac{\partial v_r}{\partial z}, \tag{B.114}$$

Análogamente, podemos discretizar los campos de velocidad y esfuerzo en espacio y tiempo en coordenadas cilíndricas. La discretización espacial se realizará acorde al esquema Fig. B.3.

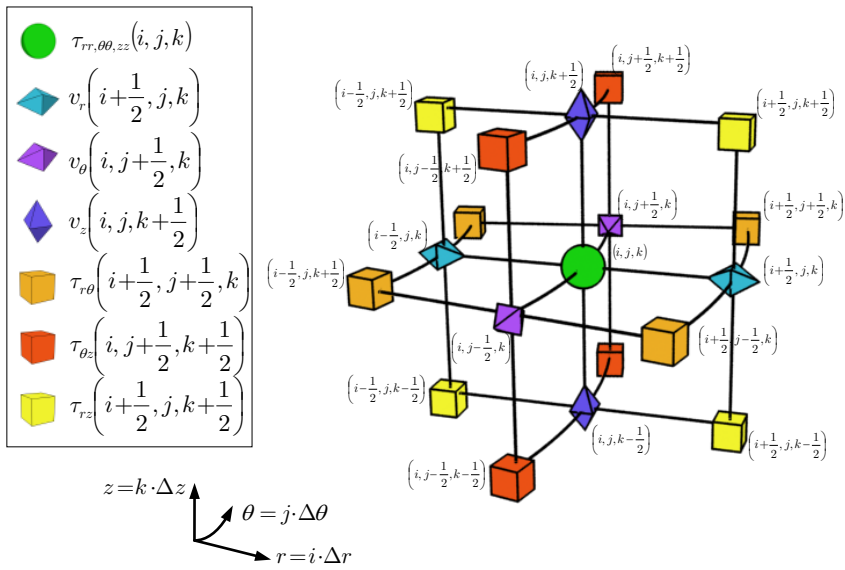


Figura B.3: Mallado del espacio 3D del modelo de sólidos; sistema de coordenadas cilíndrico.

Así, las expresiones anteriores para las componentes de velocidad se discretizan como:

$$\begin{aligned}\rho\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}-v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}=&\frac{\sigma_{rr}|_{i+1,j,k}^{n}-\sigma_{rr}|_{i,j,k}^{n}}{\Delta r}+\cdots\\&+\frac{1}{r}\frac{\sigma_{r\theta}|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n}-\sigma_{r\theta}|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^{n}}{\Delta\theta}+\cdots\\&+\frac{\sigma_{rz}|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n}-\sigma_{rz}|_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta z}+\cdots\\&+\frac{1}{r}\frac{\sigma_{rr}|_{i+1,j,k}^{n}+\sigma_{rr}|_{i,j,k}^{n}}{2}+\cdots\\&-\frac{1}{r}\frac{\sigma_{\theta\theta}|_{i+1,j,k}^{n}+\sigma_{\theta\theta}|_{i,j,k}^{n}}{2},\end{aligned}\tag{B.115}$$

$$\begin{aligned}\rho\frac{v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}-v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}=&\frac{\sigma_{r\theta}|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n}-\sigma_{r\theta}|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^{n}}{\Delta r}+\cdots\\&+\frac{1}{r}\frac{\sigma_{\theta\theta}|_{i,j+1,k}^{n}-\sigma_{\theta\theta}|_{i,j,k}^{n}}{\Delta\theta}+\cdots\\&+\frac{\sigma_{\theta z}|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n}-\sigma_{\theta z}|_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta z}+\cdots\\&+\frac{2}{r}\frac{\sigma_{r\theta}|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n}+\sigma_{r\theta}|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n}}{2},\end{aligned}\tag{B.116}$$

$$\begin{aligned}\rho\frac{v_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-v_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}=&\frac{\sigma_{rz}|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n}-\sigma_{rz}|_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta r}+\cdots\\&+\frac{1}{r}\frac{\sigma_{\theta z}|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n}-\sigma_{\theta z}|_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta\theta}+\cdots\\&+\frac{\sigma_{zz}|_{i,j,k+1}^{n}-\sigma_{zz}|_{i,j,k}^{n}}{\Delta z}+\cdots\\&+\frac{2}{r}\frac{\sigma_{rz}|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n}+\sigma_{rz}|_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n}}{2},\end{aligned}\tag{B.117}$$

para las componentes de esfuerzo normal como:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{rr}|_{i,j,k}^{n+1}-\sigma_{rr}|_{i,j,k}^{n}}{\Delta t} = (\lambda+2\mu)&\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}-v_r|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta r}+\cdots\\ &+\lambda\frac{1}{r}\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}+v_r|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{2}+\cdots\\ &+\lambda\frac{1}{r}\frac{v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}-v_\theta|_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\theta}+\cdots\\ &+\lambda\frac{v_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-v_z|_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z},\end{aligned} \tag{B.118}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{\theta\theta}|_{i,j,k}^{n+1}-\sigma_{\theta\theta}|_{i,j,k}^{n}}{\Delta t} =(\lambda+2\mu)&\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}-v_r|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{2}+\cdots\\ &+\frac{\lambda+2\mu}{r}\frac{v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}-v_\theta|_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\theta}+\cdots\\ &+\lambda\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}-v_r|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta r}+\cdots\\ &+\lambda\frac{v_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-v_z|_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z},\end{aligned} \tag{B.119}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{zz}|_{i,j,k}^{n+1}-\sigma_{zz}|_{i,j,k}^{n}}{\Delta t} = (\lambda+2\mu)&\frac{v_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-v_z|_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z}+\cdots\\ &+\frac{\lambda}{r}\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}+v_r|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{2}+\cdots\\ &+\lambda\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}-v_r|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta r}+\cdots\\ &+\frac{\lambda}{r}\frac{v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}-v_\theta|_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\theta},\end{aligned} \tag{B.120}$$

y para las componentes de esfuerzo de cizalla como:

$$\frac{\sigma_{r\theta}|^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - \sigma_{r\theta}|^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}{\Delta t} = \mu \frac{v_\theta|^{n+\frac{1}{2}}_{i+1,j+\frac{1}{2},k} - v_\theta|^{n+\frac{1}{2}} i, j+\frac{1}{2}, k}{\Delta r} + \cdots + \frac{\mu}{r}\frac{v_r|^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+1,k} - v_r|^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\Delta\theta} + \cdots - \frac{\mu}{r}\frac{v_\theta|^{n+\frac{1}{2}}_{i+1,j+\frac{1}{2},k} + v_\theta|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k}}{2}, \tag{B.121}$$

$$\frac{\sigma_{rz}|^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - \sigma_{rz}|^{n}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \mu \frac{v_z|^{n+\frac{1}{2}}_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} - v_z|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta r} + \cdots + \mu \frac{v_r|^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j,k+1} - v_r|^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\Delta z}, \tag{B.122}$$

$$\frac{\sigma_{\theta z}|^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \sigma_{\theta z}|^{n}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \mu \frac{v_z|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+1,k+\frac{1}{2}} - v_z|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta\theta} + \cdots + \mu \frac{v_\theta|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k+1} - v_\theta|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k}}{\Delta z}. \tag{B.123}$$

Las condiciones de estabilidad y dispersión se calcularán de la misma manera que para el método de fluidos, pero teniendo en cuenta que las velocidades máximas están gobernadas por las ondas longitudinales y las velocidades mínimas por las transversales.

B.4 Sistema de coordenadas esféricas

De igual manera, resolviendo las ecuaciones constitutivas utilizando el gradiente y la divergencia en coordenadas esféricas podemos obtener las expresiones en las componentes $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$ de manera que resolviendo para la componente $i = r, \theta, \varphi$ de velocidad de partícula v_i como:

$$\rho\frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta}\cot\theta}{r}, \tag{B.124}$$

$$\rho\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{3\sigma_{r\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})\cot\theta}{r}, \tag{B.125}$$

$$\rho\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi}\cot\theta}{r}, \tag{B.126}$$

para la componente $i = r, \theta, \varphi$ de esfuerzo normal σ_{ii} como:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2}{r} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} v_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \text{(B.127)}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2}{r} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} v_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \cdots + 2\mu \left(\frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right), \quad \text{(B.128)}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2}{r} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} v_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \cdots + 2\mu \left(\frac{v_r}{r} + \frac{\cot \theta}{r} v_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right), \quad \text{(B.129)}$$

y para la componente $i = r, \theta, \varphi$; $j = r, \theta, \varphi$; $i \neq j$ de esfuerzo de cizalla σ_{ij} como:

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial t} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right), \quad \text{(B.130)}$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial t} = \mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right), \quad \text{(B.131)}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial t} = \mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\cot \theta}{r} v_\varphi \right). \quad \text{(B.132)}$$

La implementación de las PML en coordenadas esféricas se realiza descomponiendo las componentes de los campos en función de su dependencia de la coordenada r y

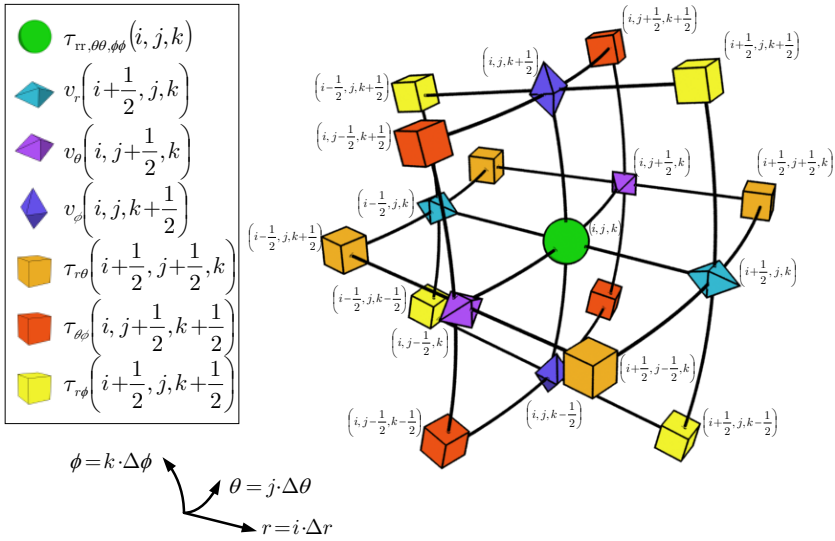


Figura B.4: Mallado del espacio 3D del modelo de sólidos; sistema de coordenadas esférico.

el resto, al que denominaremos $\theta\varphi$,

$$v_r = v_r^r + v_r^{\theta\varphi}, \qquad v_\theta = v_\theta^r + v_\theta^{\theta\varphi}, \qquad v_\varphi = v_\varphi^r + v_\varphi^{\theta\varphi}, \tag{B.133}$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^r + \sigma_{rr}^{\theta\varphi}, \qquad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^r + \sigma_{\theta\theta}^{\theta\varphi}, \qquad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi}^r + \sigma_{\varphi\varphi}^{\theta\varphi}, \tag{B.134}$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta}^r + \sigma_{r\theta}^{\theta\varphi}, \qquad \sigma_{\theta\varphi} = \sigma_{\theta\varphi}^{\theta\varphi}, \qquad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}^r + \sigma_{r\varphi}^{\theta\varphi}. \tag{B.135}$$

Finalmente, las ecuaciones constitutivas se escriben para las velocidades como:

$$\rho\left(\alpha_r \frac{\partial v_r^r}{\partial t} + \Omega_r v_r^r\right) = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}, \tag{B.136}$$

$$\rho\left(A_r \frac{\partial v_r^{\theta\varphi}}{\partial t} + \Omega_r' v_r^{\theta\varphi}\right) = \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + 2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta}\cot\theta, \tag{B.137}$$

$$\rho\left(\alpha_r \frac{\partial v_\theta^r}{\partial t} + \Omega_r v_\theta^r\right) = \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r}, \tag{B.138}$$

$$\rho\left(A_r \frac{\partial v_\theta^{\theta\varphi}}{\partial t} + \Omega_r' v_\theta^{\theta\varphi}\right) = \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + 3\sigma_{r\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})\cot\theta, \tag{B.139}$$

$$\rho\left(\alpha_r \frac{\partial v_\varphi^r}{\partial t} + \Omega_r v_\varphi^r\right) = \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} \tag{B.140}$$

$$\rho\left(A_r \frac{\partial v_\varphi^{\theta\varphi}}{\partial t} + \Omega_r' v_\varphi^{\theta\varphi}\right) = \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + 3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi}\cot\theta, \tag{B.141}$$

para los esfuerzos normales:

$$\alpha_r \frac{\partial \sigma_{rr}^r}{\partial t} + \Omega_r \sigma_{rr}^r = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v_r}{\partial r}, \tag{B.142}$$

$$A_r \frac{\partial \sigma_{rr}^{\theta\varphi}}{\partial t} + \Omega_r' \sigma_{rr}^{\theta\varphi} = \lambda\left(2v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \cot\theta v_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right), \tag{B.143}$$

$$\alpha_r \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^r}{\partial t} + \Omega_r \sigma_{\theta\theta}^r = \lambda\frac{\partial v_r}{\partial r}, \tag{B.144}$$

$$\begin{aligned} A_r \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{\theta\varphi}}{\partial t} + \Omega_r' \sigma_{\theta\theta}^{\theta\varphi} = {} & \lambda\left(2v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \cot\theta v_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right) + \cdots \\ & + 2\mu\left(v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right), \end{aligned} \tag{B.145}$$

$$\alpha_r \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}^r}{\partial t} + \Omega_r \sigma_{\varphi\varphi}^r = \lambda\frac{\partial v_r}{\partial r}, \tag{B.146}$$

$$\begin{aligned} A_r \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}^{\theta\varphi}}{\partial t} + \Omega_r' \sigma_{\varphi\varphi}^{\theta\varphi} = {} & \lambda\left(2v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \cot\theta v_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right) + \cdots \\ & + 2\mu\left(v_r + \cot\theta v_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right), \end{aligned} \tag{B.147}$$

y para los esfuerzos transversales como:

$$\alpha_r \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{r}}{\partial t} + \Omega_r \sigma_{r\theta}^{r} = \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial r}, \tag{B.148}$$

$$A_r \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{\theta\varphi}}{\partial t} + \Omega_r' \sigma_{r\theta}^{\theta\varphi} = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right), \tag{B.149}$$

$$A_r \frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{\theta\varphi}}{\partial t} + \Omega_r' \sigma_{r\varphi}^{\theta\varphi} = \mu \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - v_\varphi \right), \tag{B.150}$$

$$\alpha_r \frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{r}}{\partial t} + \Omega_r \sigma_{r\varphi}^{r} = \mu \frac{\partial v_\varphi}{\partial r}, \tag{B.151}$$

$$A_r \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}^{\theta\varphi}}{\partial t} + \Omega_r' \sigma_{\theta\varphi}^{\theta\varphi} = \mu \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \cot\theta v_\varphi \right). \tag{B.152}$$

Por último, las expresiones anteriores en coordenadas esféricas se pueden discretizar en espacio y tiempo según el esquema mostrado en la Fig. B.4. Así, las ecuaciones constitutivas las podamos escribir de manera discreta para las componentes $i = r, \theta, \varphi$ de velocidad de partícula v_i como:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{v_r\big|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}} - v_r\big|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} =& \frac{\sigma_{rr}^{n}|_{i+1,j,k} - \sigma_{rr}^{n}|_{i,j,k}}{\Delta r} + \cdots \\
&+ \frac{1}{r} \frac{\sigma_{r\theta}|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n} - \sigma_{r\theta}|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^{n}}{\Delta \theta} + \cdots \\
&+ \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\sigma_{r\varphi}|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n} - \sigma_{r\varphi}|_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta \varphi} + \cdots \\
&+ \frac{1}{r} \frac{\sigma_{rr}|_{i+1,j,k}^{n} + \sigma_{rr}|_{i,j,k}^{n}}{2} + \cdots \\
&- \frac{1}{r} \frac{\sigma_{\theta\theta}|_{i+1,j,k}^{n} + \sigma_{\theta\theta}|_{i,j,k}^{n}}{2} + \cdots \\
&- \frac{1}{r} \frac{\sigma_{\varphi\varphi}|_{i+1,j,k}^{n} + \sigma_{\varphi\varphi}|_{i,j,k}^{n}}{2} + \cdots \\
&+ \frac{\cot\theta}{r} \frac{\sigma_{r\theta}|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n} - \sigma_{r\theta}|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^{n}}{2},
\end{aligned} \tag{B.153}$$

$$\begin{aligned}\rho\frac{v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}-v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}=&\frac{1}{r}\frac{\sigma_{\theta\theta}|_{i,j+1,k}^{n}-\sigma_{\theta\theta}|_{i,j,k}^{n}}{\Delta\theta}+\cdots\\&+\frac{\sigma_{r\theta}|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n}-\sigma_{r\theta}|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^{n}}{\Delta r}+\cdots\\&+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\sigma_{\theta\varphi}|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n}-\sigma_{\theta\varphi}|_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta\varphi}+\cdots\\&+\frac{3}{r}\frac{\sigma_{r\theta}|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n}-\sigma_{r\theta}|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^{n}}{2}+\cdots\\&+\frac{\cot\theta}{r}\frac{\sigma_{\theta\theta}|_{i,j+1,k}^{n}+\sigma_{\theta\theta}|_{i,j,k}^{n}}{2}+\cdots\\&-\frac{\cot\theta}{r}\frac{\sigma_{\varphi\varphi}|_{i,j+1,k}^{n}+\sigma_{\varphi\varphi}|_{i,j,k}^{n}}{2},\end{aligned}\tag{B.154}$$

$$\begin{aligned}\rho\frac{v_\varphi|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-v_\varphi|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}=&\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\sigma_{\varphi\varphi}|_{i,j,k+1}^{n}-\sigma_{\varphi\varphi}|_{i,j,k}^{n}}{\Delta\varphi}+\cdots\\&+\frac{\sigma_{r\varphi}|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n}-\sigma_{r\varphi}|_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta r}+\cdots\\&+\frac{1}{r}\frac{\sigma_{\theta\varphi}|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n}-\sigma_{\theta\varphi}|_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta\theta}+\cdots\\&+\frac{3}{r}\frac{\sigma_{r\varphi}|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n}-\sigma_{r\varphi}|_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n}}{2}+\cdots\\&+\frac{2}{r}\cot\theta\frac{\sigma_{\theta\varphi}|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n}+\sigma_{\theta\varphi}|_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n}}{2},\end{aligned}\tag{B.155}$$

para la componente $i=r,\theta,\varphi$ de esfuerzo normal σ_{ii} como:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{rr}|_{i,j,k}^{n+1}-\sigma_{rr}^{n}|_{i,j,k}}{\Delta t}=&\left(\lambda+2\mu\right)\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}-v_r|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta r}+\cdots\\&+\frac{2\lambda}{r}\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}+v_r|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{2}+\cdots\\&+\frac{\lambda}{r}\frac{v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}-v_\theta|_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\theta}+\cdots\\&+\frac{\lambda\cot\theta}{r}\frac{v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}+v_\theta|_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{2}+\cdots\\&+\frac{\lambda}{r\sin\theta}\frac{v_\varphi|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-v_\varphi|_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\varphi},\end{aligned}\tag{B.156}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{\theta\theta}|_{i,j,k}^{n+1}-\sigma_{\theta\theta}^{n}|_{i,j,k}}{\Delta t} =&\frac{\lambda+2\mu}{r}\frac{v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}-v_\theta|_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\theta}+\cdots\\ &+\lambda\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}-v_r|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta r}+\cdots\\ &+\frac{2\lambda}{r}\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}+v_r|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{2}+\cdots\\ &+\frac{\lambda\cot\theta}{r}\frac{v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}+v_\theta|_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{2}+\cdots\\ &+\frac{\lambda}{r\sin\theta}\frac{v_\varphi|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-v_\varphi|_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\varphi}+\cdots\\ &+2\mu\frac{1}{r}\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}+v_r|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{2},\end{aligned}\tag{B.157}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{\varphi\varphi}|_{i,j,k}^{n+1}-\sigma_{\varphi\varphi}|_{i,j,k}^{n}}{\Delta t} =&\frac{\lambda+2\mu}{r\sin\theta}\frac{v_\varphi|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-v_\varphi|_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\varphi}+\cdots\\ &+\frac{(\lambda+2\mu)\cot\theta}{r}\frac{v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}+v_\theta|_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{2}+\cdots\\ &+\lambda\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}-v_r|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta r}+\cdots\\ &+\frac{2\lambda}{r}\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}+v_r|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{2}+\cdots\\ &+\frac{\lambda}{r}\frac{v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}-v_\theta|_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\theta}+\cdots\\ &+\frac{2\mu}{r}\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}+v_r|_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{2},\end{aligned}\tag{B.158}$$

y para las componentes $i=r,\theta,\varphi$; $j=r,\theta,\varphi$; $i\neq j$ de esfuerzo de cizalla σ_{ij}

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{r\theta}|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+1}-\sigma_{r\theta}|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n}}{\Delta t} =&\mu\frac{v_\theta|_{i+1,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}-v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta r}+\cdots\\ &+\frac{\mu}{r}\frac{v_r|_{i+\frac{1}{2},j+1,k}^{n+\frac{1}{2}}-v_r|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\theta}+\cdots\\ &-\mu\frac{v_\theta|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}+v_\theta|_{i+1,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{2},\end{aligned}\tag{B.159}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{r\varphi}|^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - \sigma_{r\varphi}|^{n}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta t} =& \mu \frac{v_\varphi|^{n+\frac{1}{2}}_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} - v_\varphi|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta r} + \cdots \\ &+ \frac{\mu}{r\sin\theta} \frac{v_r|^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j,k+1} - v_r|^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\Delta\varphi} + \cdots \\ &- \frac{\mu}{r} \frac{v_\varphi|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j,k+\frac{1}{2}} + v_\varphi|^{n+\frac{1}{2}}_{i+1,j,k+\frac{1}{2}}}{2}, \end{aligned} \tag{B.160}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{\theta\varphi}|^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \sigma_{\theta\varphi}|^{n}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{\Delta t} =& \frac{\mu}{r} \frac{v_\varphi|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+1,k+\frac{1}{2}} - v_\varphi|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta\theta} + \cdots \\ &+ \frac{\mu}{r\sin\theta} \frac{v_\theta|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k+1} - v_\theta|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k}}{\Delta\varphi} + \cdots \\ &- \frac{\mu\cot\theta}{r} \frac{v_\varphi|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j,k+\frac{1}{2}} + v_\varphi|^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}}{2}. \end{aligned} \tag{B.161}$$

Las condiciones de estabilidad y dispersión se calculará de la misma manera que para el método de fluidos, pero teniendo en cuenta que las velocidades máximas están gobernadas por las ondas longitudinales y las velocidades mínimas por las transversales.

C
PUBLICACIÓN EN REVISTA CIENTÍFICA

El presente trabajo ha sido publicado en forma de artículo de investigación:

Ultrasonic evaluation of the hydration degree of the orange peel

N. Jiménez, R. Picó, F. Camarena, J. Redondo, B. Roig,
Postharvest Biology and Technology, 67, pp 130-137, (2012).

Abstract

The elastic parameters of fruit and vegetables are normally monitored in quality control processes as there is a good correlation to the degrees of firmness, turgidity and humidity. These parameters have been traditionally measured by means of penetration tests, which are destructive. This has resulted in the increased attention recently given to ultrasonic techniques applied to the quality evaluation of horticultural commodities. Nevertheless, since most of the fruit and vegetables display a viscoelastic behavior, the penetration test should be considered to be quasi-static, especially when compared with the speeds associated with the ultrasonic tests. Both methods should

Noé Jiménez, © 2009 Universitat Politècnica de València

provide different values for the elastic parameters. The aim of this work is to study this discrepancy in the values of the elastic parameters and interpret the elastodynamic behavior of the vegetable tissue under an ultrasound test. Thus, the paper presents an ultrasonic nondestructive method to evaluate the elastic parameters of the sweet orange peel at 40 kHz. The complete dehydration process of two sets of oranges (Navelina and Ortanique) was monitored for 2 months. A linear elastic solid model with viscous losses was numerically solved using a simulation scheme based on a 3D-Spherical FDTD method (Finite-Difference Time-Domain) in order to interpret the results, which proved that the elastic parameters obtained by penetration and ultrasonic tests differ. The method provides an empirical relation between the hydration state and the elastic parameters of the orange peel. Therefore, the proposed ultrasonic test reported in this work is capable of determining the hydration state of the orange simply by measuring the propagation speed of the Rayleigh waves on the orange peel, and hence, can be used as a fruit quality index during postharvest processes.

C.1 Introduction

In the context of modern agriculture and its competitive markets there is growing interest regarding the need to evaluate the quality of fruit and vegetables. Quality is a subjective term consisting of many properties or characteristics such as sensory properties (appearance, texture, taste or smell) that have to be examined by people, and mechanical and functional properties, in addition to nutritive values, chemical constituents, and the absence of defects. Mindful of this, instrumentation and methods to measure quality-related attributes have been developed over the last 80 years, most recently in an attempt to establish non-destructive and real-time systems. In order to evaluate texture attributes, the mechanical properties are usually measured (Abbott, 1999). The traditional methods for evaluating these properties (such as Young's Modulus, and also the rupture force and bioyield force) are puncture or compression tests made at relatively low probe speeds ($\ll$ 1 m/s), typical of such instruments as the Magness–Taylor fruit firmness tester and the electronic universal (Force/Deformation) testing instruments, which are quasi-static.

Acoustic methods are also used for quality evaluation (accounting for approximately 20% of the nondestructive techniques, Butz et al., 2005). In specifically, ultrasonic devices and measuring techniques have been developed over the last two decades to evaluate the mechanical properties of tissue, allowing the nondestructive monitoring of some physiochemical, biochemical and mechanical changes that occur in fruit tissues during the various stages of their pre- and postharvest existence. Some examples of these can be found in Mizrach (2000), Flitsanov et al. (2000), Verlinden et al. (2004), Bechar et al. (2005) and Gaete-Garreton et al. (2005). A review of the different ultrasonic techniques used for determining the material properties of fresh fruit and vegetable tissues during the last two decades can be found in Mizrach, 2008. Some of these techniques have been used in the past to find correlations between ultrasonic velocity and absorption through the orange peel and turgidity and

the hydration state of oranges (Camarena and Martinez-Mora, 2006; Camarena et al., 2007). These techniques can also be used to evaluate the elastic parameters of the orange peel and consequently the hydration degree, as it will be demonstrated in this work.

The information of changes in postharvest physico-mechanical properties (elastic parameters) of the orange peel and the fruit under ambient and refrigerated storage conditions is important to help to determine the appropriate handling, packaging, storage and transportation systems (Singh and Sreenivasula, 2006).

The orange, just as most of the other juicy fruits such as the tomato, cherry and various berry fruits, exhibits viscoelastic behavior. This signifies that the elastic parameters depend not only on the force and deformation, but also on the time factor (Abbot, 1999). Regarding this, the elastic parameters obtained with quasi-static techniques may differ from those obtained using ultrasonic techniques. Evidence can be seen in Table C.1 that displays a review of the elastic parameters measured by means of quasi-static procedures for different fruits, the bulk and shear speed calculated from these parameters and the speed evaluated from ultrasonic experiments. These experiments can be destructive, if inner parts of the fruit are directly measured, or non destructive, if the ultrasonic wave is excited and detected in the surface of the fruit. However, the speed measurements are always associated to shear or surface waves, as it will be demonstrated in this work. There is a clear disagreement between the calculated and measured speeds for all the fruits, and it is one of the objectives of this work to clarify this disagreement.

In this work an ultrasonic nondestructive method is proposed to evaluate the elastic parameters of the orange fruit. Two sets of oranges, Navelina and Ortanique, have been monitored ultrasonically during the entire dehydration process (2 months). From an elastodynamic point of view, the entire orange has been discomposed into three spherical shells corresponding anatomically to the flavedo (fruit peel), albedo and inner carpels tissue of the orange fruit. A linear elastic model has been proposed and a computational method based on FDTD (Finite-Differences Time-Domain)

Tabla C.1: Quasi-static measured elastic properties, density, ρ, Young modulus, E and Poisson's ratio, ν. Calculated longitudinal, c_p, and shear, c_s, wave speed, and ultrasonic measured speed of various fruits and vegetables, c. Quasi static data from: Orange (Singh and Sreenivasula, 2006); avocado (Baryeh, 2000); Apple (Grotte et al., 2002); Potato (Jindal and Techasena, 1985); Carrot (Bunyaphlanan, 1973).

Fruits	Quasi-static measured parameters			Calculated		Measured
	ρ (kg/m^3)	E (MPa)	ν	c_p (m/s)	c_s (m/s)	c (m/s)
Orange	903	1.57	0.34	82.7	54.6	130-240
Avocado	963	0.48	0.33	32.1	18.2	150-400
Apple	1003	3.33	0.17	65.1	36.5	98-183
Potato	1087	7.14	0.25	60.8	34.1	686.9
Carrot	1021	6.96	0.30	104.1	64.1	341-500

scheme has been implemented in order to simulate the propagation of the ultrasonic waves through these three layers. It has allowed us to clarify the nature of the different waves traveling through the orange, to demonstrate that the waves measured by our device are surface waves and also that the quasi-static parameters are incoherent with the ultrasonic framework.

C.2 Experimental set-up and measurement procedure

An experimental transmitter-receiver device was designed to excite and detect acoustic waves on the surface of the orange as can be observed in Fig. C.1. A harmonic wave function generator (Agilent model 33220A, Agilent Technologies Canada, Mississauga, ON, USA) and a power amplifier (ENI model 240L, ENI, Rochester, NY, USA) were used to excite a 40 kHz ultrasonic sandwich transducer built in our laboratory. An identical transducer was used for reception, and an oscilloscope for data acquisition and analysis. Two aluminum ultrasonic energy concentrators were used to match the surface diameters of the transducers, i.e., 14 mm, to the desired area of contact with the fruit, a diameter of 2.1 mm, using conical reduction and a flat tip shape.

The transducers were mounted on a goniometer in order to change the angle between their axis, thereby changing the gap between the transducer tips (between 2 and 10 mm) and permitting a perpendicular contact between the concentrators and the orange peel. A system of springs at the bottom of the transducers controlled the contact force applied to the fruit peel, which was maintained constant at 2 N. This particular force was chosen in trial and error tests as compromised between sufficient contacts force and preventing of tip penetration into the fruit tissue.

Emitted waves penetrated the peel and propagated through the adjacent tissue along the gap between the probe tips. Wave speed was calculated by measuring the time of flight at different gaps (2, 4, 6 and 8 mm) and fitting a line. The attenuation

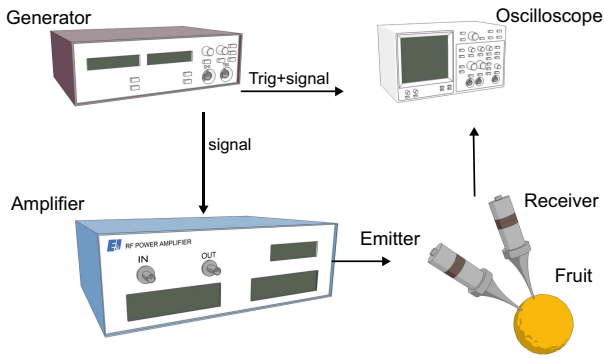


Figura C.1: Scheme of the ultrasonic measuring system.

coefficient was calculated by looking at the exponential decay of the received wave amplitude at the same gap distances (Krautkramer and Krautkramer, 1990).

On 30 January 2010, two batches of oranges were harvested from the same field (La Safor, Valencia, Spain): a set of seven Navelina sweet oranges (Citrus sinensis, L. Osbeck) with a similar size (mean diameter 7.1 cm and S.D. 0.3 cm), weight (mean weight 191 g and S.D. 26 g) and maturity, and a set of seven Ortanique oranges, a hybrid of the tangerine and sweet orange (Citrus sinensis $\times$ Citrus reticulata) also of a similar size (mean diameter 6.7 cm and S.D. 0.2 cm), weight (mean weight 130 g and S.D. 13 g) and maturity. No specific chemical processing was applied to the fruit and it was stored under ambient conditions (20–23 °C and 49–53% relative humidity).

The seven Navelina and the seven Ortanique oranges were monitored for their ultrasonic properties and degree of dehydration over 65 d. The extent of dehydration was evaluated from the weight loss, as explained in Camarena and Martinez-Mora (2006) and Camarena et al. (2007).

C.3 Numerical simulation

With the aim of understanding the nature of the wave detected by the ultrasonic experimental device, a FDTD simulation has been implemented. An inverse method to obtain the elastic parameters from the speed measurements has been used. Thus, the wave propagation speed has been experimentally measured in the fruit surface and a compressional sound speed similar than water has been assumed. From these sound speed values the elastic properties of the orange peel has been calculated and finally simulation was launched with these parameters to check that the received waves in that simulation are the same that the measured ones. The concordance was checked by study the polarization of the waves and the sound speed in the media detected by the simulated ultrasonic device. This procedure has been widely used in other fields such as geophysics, where it is used to obtain the mechanical characteristics of the soil (Banab and Motazedian, 2010) and in biomechanics where it helps to characterize biological tissue such as bones (Bossy et al., 2004). The proposed simulation considers a physical model for the orange (a linear elastic solid) and a set of boundary conditions (three spherical layers with different levels of thickness according to the characteristics of the orange), and also presupposes the values of the elastic pa-

Tabla C.2: Mechanical parameters used in the simulations for the two models.

Parameter	Air	Flavedo	Albedo	Inner core
Density, ρ (kg/m^3)	1.21	903	820	978
Lame's 1st, λ (MPa)	0.142	1.95·103	$0.62{\cdot}10^3$	$2.2{\cdot}10^3$
Lame's 2nd, μ (MPa)	0	36	10,8	0
Young Modulus, E (MPa)	-	107.3	22.2	-
Poisson's Ratio, ν	-	0.491	0.25	-

rameters of each of these layers (as shown in Table C.2). From an elastodynamic perspective, the orange tissue can be divided into three different layers. Firstly, the outermost part of the fruit peel is the orange pigmented shell known as the flavedo, where, embedded in the pits, are the many volatile oil glands. On the reverse side of the flavedo, there is a porous white layer, the albedo. Finally, the water-like tissue core of the orange is composed of fluid-filled vesicles called carpels which contain the orange juice and seeds (Agusti, 2000).

Due to the elevated water content in fruit's peel (about 75% of the peel mass is water, 296% dry basis (Singh and Sreenivasula, 2006)) it is reasonable to believe that a linear acoustic fluid model for wave propagation would be appropriate to study the elastic parameters of the orange peel. This model is able to predict the directivity pattern of the sound pressure field (Mizrach et al., 2009). However, as will be observed from our study, longitudinal acoustic waves are incapable of explaining the low values obtained for the wave velocity in the experiments. Transverse wave propagation should be taken into account. As such, it is necessary to incorporate the shear elasticity within the model. In order to do so, the wellestablished model for a linear elastic solid is proposed; that is a solid for which the strain is fully determined by the stress. Additionally, as the cell structure of the orange is very small in comparison with the typical wavelength of ultrasound on these media (5 mm for shear waves and 3.8 cm for longitudinal waves at 40 kHz), it can be assumed that the tissue is homogeneous and can be fully described by its linear elastic properties.

The main equations of the model can be deduced from Newton's second law and Hooke's law (Auld, 1973). In velocity-stress lossless formulation this can be written as:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} = \lambda \bar{\mathrm{I}} \left(\nabla \cdot \mathbf{v}\right) + \mu \left(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla\right), \tag{C.1}$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \tag{C.2}$$

where $\boldsymbol{\sigma}$ is the stress tensor, and $\mathbf{v}$ is the particle displacement velocity vector. This model accounts for the propagation of volumetric waves (longitudinal and transverse) as well as surface acoustic waves (Rayleigh, 1885).

Due to the spherical shape of the orange, the most straightforward way to solve the problem is to express Eqs. (C.2–C.2) in the spherical coordinate system (r, θ, φ), where r is the radial distance, θ is the azimuth and ϕ the elevation angle. For the i-th component $i = (r, \theta, \varphi)$ the particle velocity v_i is:

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \cot\theta}{r}, \tag{C.3}$$

$$\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{3\sigma_{r\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \cot\theta}{r}, \tag{C.4}$$

$$\rho \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi} \cot\theta}{r}, \tag{C.5}$$

for the normal stress σ_{ii} as:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial t} + \eta_p \sigma_{rr} = \lambda \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2}{r} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} v_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \cdots + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \tag{C.6}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial t} + \eta_p \sigma_{\theta\theta} = \lambda \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2}{r} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} v_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \cdots + 2\mu \left(\frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right), \tag{C.7}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial t} + \eta_p \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2}{r} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} v_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \cdots + 2\mu \left(\frac{v_r}{r} + \frac{\cot \theta}{r} v_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right), \tag{C.8}$$

and, finally, for the $i = (r, \theta, \varphi)$, $j = (r, \theta, \varphi)$ and $i \neq j$ the shear stress σ_{ij} components can be expressed as:

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial t} + \eta_s \sigma_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right), \tag{C.9}$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial t} + \eta_s \sigma_{r\varphi} = \mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right), \tag{C.10}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial t} + \eta_s \sigma_{\theta\varphi} = \mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\cot \theta}{r} v_\varphi \right). \tag{C.11}$$

η_p, η_s are the resistance coefficients related to the attenuation coefficient of the longitudinal and shear waves respectively (Hosokawa, 2008). The singularity at $r = 0$ and $\theta = 0$ is taken into account in the definition of the numerical scheme by excluding the center of the sphere and the plane $r = 0$ from the computational domain.

An explicit Finite-Difference Time-Domain method (FDTD) was used to simulate the elastodynamic behavior of the orange fruit. Thus, the linear solid equations are discretized using second order central difference approximations for the space and time partial derivatives and solved by a leap-frog scheme (Schröder and Scott, 2002; Chen and Chew, 1998; Chew and Liu, 1996). This leads to a spatially staggered discretization of the velocity, the normal and shear stress fields, and a temporal staggered discretization of the particle velocity vector and stress tensor.

The numerical model for the orange is defined by a domain divided into three concentric spherical shells. The surrounding outer layer of the orange domain is air. The first layer is the fruit's external orange shell, the flavedo (2 mm thick with a 50 mm curvature radius), next is the inner layer, the albedo (3 mm thick with a 48 mm curvature radius) and finally, the inner core (45 mm of curvature radius). The mechanical features of the materials selected for the simulation are listed in Table C.2 and their use is justified in Section 5 of this paper.

The unit cell of the spherical mesh consists of a pyramidal frustum element of appropriate length to limit the numerical dispersion of the computational method. To ensure this, the number of elements per wavelength, N_λ, must be higher than 10 for all elastic waves. Therefore, the length of the unit cell is chosen according to Eq. (C.12): the dispersion is determined by the minimal elastic wave speed and the maximum frequency of the signal in all subdomains:

$$N_\lambda = \frac{c_{\min}\sqrt{(\Delta r)^{-2} + (r_{\max}\Delta\theta\sin\Delta\varphi)^{-2} + (r_{\max}\Delta\varphi)^{-2}}}{f_{\max}} \geq 10. \qquad \text{(C.12)}$$

Thus, the highest element's diagonal is 3.025×10^{-5} m, which leads to 10.8 and 142.1 elements per wavelength for transversal waves and for longitudinal waves respectively at a frequency of 40 kHz in the peel layer. The temporal step, Δt, of the algorithm was selected to preserve a maximum Courant number of 0.9 over all subdomains, and to ensure that the stability conditions at media interface are satisfied (Hosokawa, 2008). According to the rectangular coordinates, the CFL stability condition for the spherical FDTD scheme is governed by the highest elastic wave speed, $c_{\max}$, and the smallest element's diagonal over all subdomains:

$$\Delta t \leq \frac{1}{c_{\max}\sqrt{(\Delta r)^{-2} + (r_{\max}\Delta\theta\sin\Delta\varphi)^{-2} + (r_{\max}\Delta\varphi)^{-2}}}. \qquad \text{(C.13)}$$

Note that these relations, Eqs (C.12) and (C.13), are empirical expression based on our numerical experiments, like the stability conditions in (Chen and Chew, 1998) for cylindrical coordinates. In order to reduce the computational cost of the numerical scheme, only a sector of the total orange domain has been simulated, and a Perfect Matched Layer (PML) was used to absorb reflections at the boundaries. The PML implementation was based on the time-dependent form of the complex coordinate stretching formulation (Chew and Liu, 1996), with a quadratic profile and the PML scaling and attenuation coefficients values of $\alpha_{\max} = N_\lambda/2$ and $\Omega_{\max} = \alpha_{\max} 2\pi f_{\max}$ rad/s respectively. Thus, a PML layer was designed with a width of 20 elements, $\Omega_{\max} = 2.56 \times 10^6$ rad/s and $\alpha_{\max} = 5.4$. The excitation signal was a negative normalized second derivative of a Gaussian function, also known as a Ricker wavelet, centered at 40 kHz.

C.4 Results

C.4.1 Experimental studies

These studies monitor the progress of the changes in the properties of the orange during storage under ambient conditions. Needless to say, dehydration increases with storage time (Fig. C.2) due to weight loss through transpiration. Navelina dehydration reaches 3.8 kg/m^2 after 64 d under ambient conditions, while the Ortanique reaches 2.69 kg/m^2 in the same period under identical conditions. Fig. C.2 can be

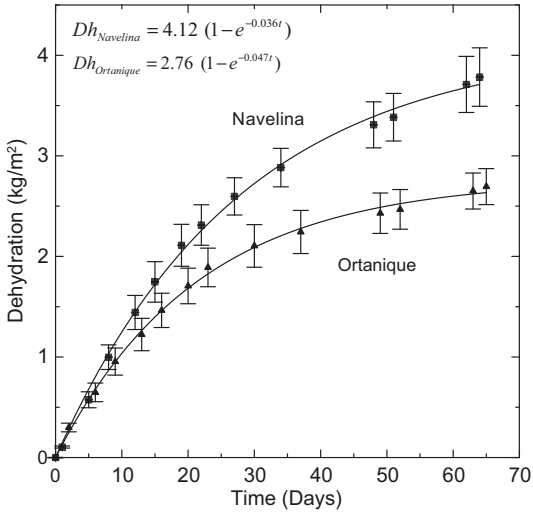


Figura C.2: Dehydration of oranges during storage under ambient conditions. Uncertainty bars show the standard deviation of the values obtained for 7 oranges.

explained as a non-linear relation with an asymptotic value. If we follow the hypothesis that the transfer rate of water from the orange to the atmosphere depends on the fruit surface area, the mass transfer coefficient and the difference between the water potential of the fruit and ambient conditions (De-Smedt et al., 2002), and we suppose the difference between fruit and ambient water potential is proportional to the water content of the fruit, then the next expression can be fitted to a good theoretical basis:

$$Dh(t) = a\left(1 - \exp\left(-bt\right)\right), \tag{C.14}$$

where Dh is the dehydration during storage, kg/m^2, t the storage period, in days, and R the correlation coefficient. Velocity of ultrasound through the orange peel increases with time (Fig. C.2), from 120 to 220 m/s, approximately. Error bars, between 10 and 15%, are due to the intrinsic measurement procedure and the dispersion between the seven oranges. Here, differentiation between the two orange varieties is avoided. As in the case of dehydration, a non-linear asymptotic expression taking three parameters can relate velocity with time:

$$c(t) = c_0 + a\left(1 - \exp\left(-bt\right)\right), \tag{C.15}$$

Tabla C.3: Parameters obtained from the fit of experimental data to the theoretical expressions for dehydration and velocity.

Variety	Dehydration			Velocity			
	a (kg/m^2)	b	R^2	c_0 (m/s)	a (m/s)	b	R^2
Navelina	4.12	0.036	0.99	109.4	123.8	0.063	0.97
Ortanique	2.76	0.047	0.99	112.1	108.2	0.064	0.97

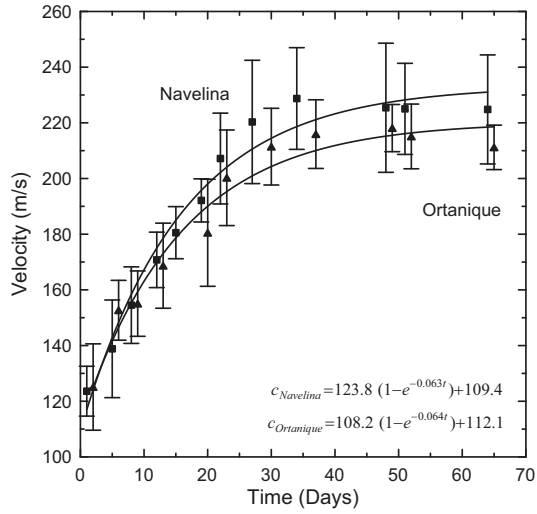


Figura C.3: Ultrasonic wave speed in the orange during storage under ambient conditions. Uncertainty bars show the standard deviation of the values obtained for 10 oranges.

where c is the speed of ultrasound through the orange peel, m/s, and t is the storage period in days. The constant term is necessary due to the fact that there is non-zero velocity on the day of the harvest.

The parameters obtained from the fit of experimental data to expressions (C.14) and (C.15) for Navelina and Ortanique can be seen in Table C.3.

According to the accuracy of our experiment, the absorption of the ultrasonic waves in the orange peel remains constant during the 2 months of measurement. Navelina absorption remains at 1.8 ± 0.2 dB/mm and the Ortanique at 1.7 ± 0.3 dB/mm. The stability of absorption during storage time implies that this magnitude cannot be used as a quality control parameter, as has been demonstrated in Camarena et al., 2007. However, the absorption values measured here are very relevant for the discussion concerning the nature of the waves used to evaluate the elastic parameters of the orange peel.

C.4.2 Numerical studies

Figure C.4 on the left shows the snapshots of the normal stress modulus, illustrating the elastodynamic behavior of the modeled orange fruit with viscous loss. The figures show the three wave motions predicted: the most large wavelength pressure wave, the shear wave and the surface wave. In the sequence on the right, snapshots of the particle position are shown. From this, it can be appreciated how the longitudinal wave is strongly attenuated compared to the surface wave, which is the only one that can travel until 1 cm along the fruit's surface as it happens in the experiments.

Figure C.5 is a space-time plot. It reveals the recorded temporal signals versus the distance to the excitation source for several points on the surface of the simulated orange. Damping has not been considered in this simulation. From this plot, the propagation speed of the different waves existing in the simulation can be calculated

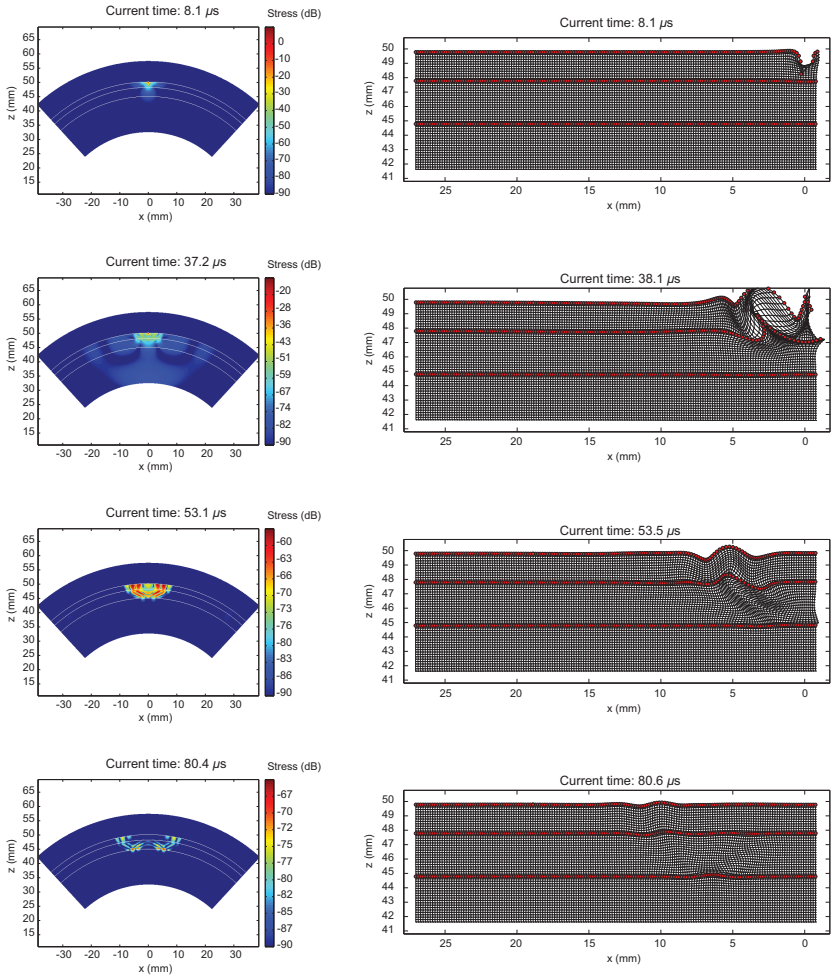


Figura C.4: Snapshots of the stress and the particle position for the fruit model with 1.8 dB/mm viscous loss.

by following the same procedure used in the experiment. The dotted white lines represent the fit for the traces of waves of equal phase in time and space. They show that two waves with different speeds can be detected on the surface of the orange model: the longitudinal wave (circles, 1576.0 m/s) and the surface wave (squares, 200.2 m/s).

A second model was simulated in order to take into account the high absorption of the vegetable fruit tissue, with the same parameters listed in Table C.2 and setting the resistance coefficients to the attenuation values measured empirically (1.8 dB/mm,

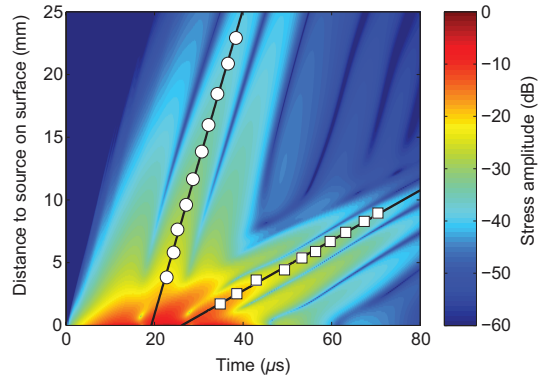


Figura C.5: Space-time diagram for the fruit model without damping. The circles represent the linear fit for longitudinal waves and the squares represent the fit for surface waves.

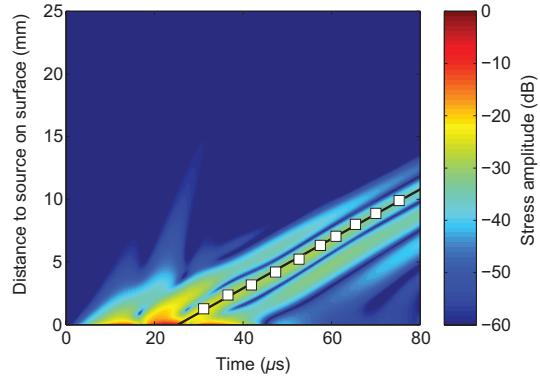


Figura C.6: Space-time diagram for the fruit model with 1.8 dB/mm viscous loss. The circles represent the linear fit for surface waves.

see Section 4.1). In this case, as can be seen from Fig. C.6, only a low propagation speed wave is detected. The linear fit for the model with damping provides a wave speed value of 196.5 m/s, which concurs with the velocity measured in the experiment. From these simulations we can mainly conclude that our experimental device is sensitive only to the surface waves, i.e. due to the high damping in the orange peel, reflections of the longitudinal and shear waves in the inner parts of the orange can be overlooked.

A deeper analysis of the simulation results can allow us to determine what type of surface waves are being measured in the experiment. Fig. C.7 shows the three components of the particle velocity of the wave as a function of depth (normalized to the longitudinal wavelength (λ_L)): the longitudinal component and the shear components, both vertical and horizontal. It can be seen that the particle velocity components are spatially offset, in such a way that the longitudinal component is at a maximum when the horizontal component is minimal. In addition, the wave is attenuated as a function of depth and the penetration length is approximately λ_L. Both are specific features of Rayleigh acoustic waves. Moreover, below a depth of about 0.2 λ_L the velocity components are reversed, which means that the elliptical motion described by the particles also behaves in the same manner: on the surface the particle

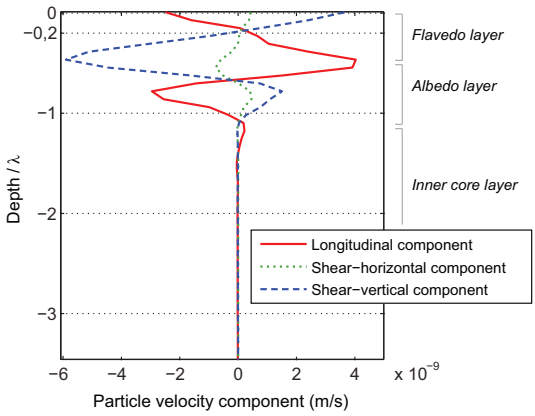


Figura C.7: Space-time diagram for the fruit model without damping. The circles represent the linear fit for longitudinal waves and the squares represent the fit for surface waves.

motion describes ellipses passing backwards in the sagittal plane, at a depth of 0.2 λ_L the particle motion displays a minimum in all components and below this depth, the elliptical motion of the particle turns in the opposite direction. From the results provided by the simulations, the physical analysis confirms that the waves propagating in the orange tissue are surface acoustic waves, more specifically Rayleigh waves.

C.4.3 Relation between the dehydration status and the elastic parameters

The main hypothesis considered to determine the elastic parameters of the orange peel is that the peel is a homogeneous water-like tissue, i.e. the longitudinal wave speed is similar to that in water ($c_p \approx 1500$ m/s) and Poisson's ratio falls in the range between $0.49 < \nu < 0.5$ (Goss et al., 1978) which results in an established relation between the pure shear wave and the Rayleigh wave ($c_r \approx 0.95 c_s$) (Malischewsky, 2005). From the linear elastic solid model, $c_s = (\mu/\rho)^{1/2}$ and $c_P = ((\lambda+2\mu)/\rho)^{1/2}$, and the hypothesis listed above, the elastic parameters of the orange peel can be determined using the following expressions:

$$E = \rho \frac{\left(\frac{c_r}{\beta}\right)^2 \left(-3{c_p}^2 + 4\left(\frac{c_r}{\beta}\right)^2\right)}{\left(\frac{c_r}{\beta}\right)^2 - {c_p}^2}, \qquad \nu = \frac{{c_p}^2 - 2\left(\frac{c_r}{\beta}\right)^2}{2{c_p}^2 - 2\left(\frac{c_r}{\beta}\right)^2}, \tag{C.16}$$

with $\beta = 0.95$, c_r is the ultrasonic measured speed, c_p is the longitudinal wave speed in water, ρ is the orange peel density, E is the Young modulus and ν is Poisson's ratio. Thus, using the proposed empirical model for the propagation speed shown in (C.14) and (C.15) and the previous relations (C.16), the evolution of the elastic parameters during storage time can be obtained for the two varieties of orange (Fig. C.8, top). Moreover, the evolution of the Young modulus can be correlated with the measured dehydration process (Fig. C.8, bottom); this figure reveals an almost

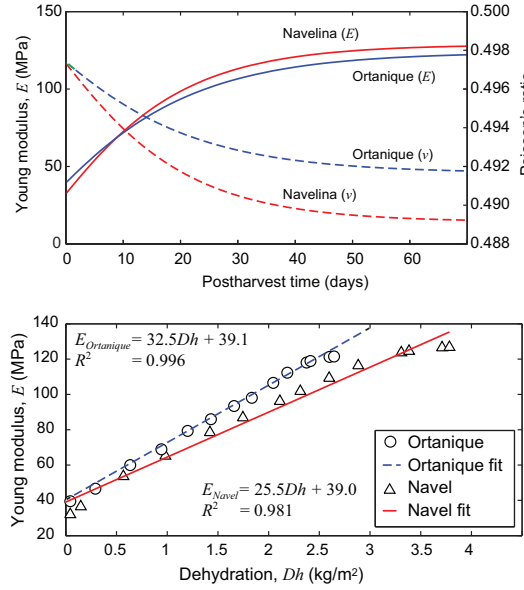


Figura C.8: (top) Evolution of the predicted elastic parameters (Young's modulus and Poisson's ratio) during the storage time for the Navelina and Ortanique oranges. (bottom) Measured fruit dehydration versus the predicted Young's modulus for the Navelina and Ortanique oranges.

linear relationship between the Young modulus and the measured dehydration of the orange peel.

C.5 Discussion

Most ultrasonic devices are used in quality evaluation of fruit and vegetables in an attempt to simply correlate the velocity and absorption of the ultrasonic wave traveling through the tissue with the quality parameter of interest. These being either sensory properties such as texture, physiochemical properties such as hydration degree, or mechanical properties, for example – firmness. Nevertheless, a solid knowledge about the type of wave that the ultrasonic device is measuring is necessary if we want to evaluate the elastic parameters of the medium, which are definitely of significance for its characterization.

The above simulation results show that the measured waves are surface Rayleigh waves, and therefore the elastic parameter can be calculated from the measured wave propagation speed values. Moreover, in this study has been found a relationship between the ultrasonically evaluated Young modulus and the measured dehydration of the orange peel, which means that the elastic parameters predicted by ultrasound are strongly related to an absolute physiological index. Therefore, the proposed ultrasonic test reported in this work is capable of determining the hydration state of the orange simply by measuring the propagation speed of the Rayleigh waves on the orange peel, and hence, can be used as a fruit quality index during postharvest processes.

C.6 Conclusion

An experimental method has been used to evaluate the hydration state and the velocity of the ultrasonic waves in the peel of two varieties of oranges over their complete dehydration process. Both magnitudes change with storage time (hydration degree decreases and velocity increases) because the peel suffers many physiological changes during its dehydration process and ageing. So, the measurement of the ultrasonic wave velocity can be used to estimate the hydration degree of the orange. Otherwise, in order to evaluate the effect of the dehydration on the mechanical characteristics of the peel (Young modulus and Poisson's ratio) a better understanding is necessary on the nature of the ultrasonic waves that our experimental device is measuring. A solid elastic model has been proposed to simulate the wave propagation into the orange peel and a good agreement has been found between the ultrasonic wave velocity measured in the experiment and the velocity associated to a Rayleigh wave in the simulation. The values of the Young modulus obtained in the simulation fall in the range between 40 and 132 MPa, considerably higher than the values obtained from quasi-static measurements (1.57 MPa; Singh and Sreenivasula, 2006). The proposed model is able to explain the low values of velocity obtained in most of the experiments that make use of ultrasonic technology for fruit characterization (Camarena et al., 2007; Baryeh, 2000; Grotte et al., 2002; Jindal and Techasena, 1985; Bunyaphlanan, 1973): the ultrasonic waves detected are shear or Rayleigh waves, depending on the experimental configuration. Finally, this model allows the elastic parameters during the storage time of the fruit to be obtained from the values of the velocity measured and a linear relation has been found between the Young modulus and the dehydration degree of the orange peel. This relation can be used as a non-destructive method to estimate the hydration state of the orange.

Acknowledgements

This study was supported by the Programa de Apoyo a la Investigación y Desarrollo (PAID-05-09-002-618), (PAID-06-10-002-295) of Universidad Politécnica de Valencia. The authors would like to thank K. Y. Foo, from the University of Birmingham and P. Malischewsky from the University Friedrich-Schiller at Jena, for the fruitful discussions regarding surface acoustic waves.

References

Abbot, J.A., 1999. Quality measurement of fruits and vegetables. Postharvest Biol. Technol. 15 (3), 207–225.

Agusti, M., 2000. Citricultura. Mundi-Prensa, Madrid.

Auld, B.A., 1973. Acoustic Fields and Elastic Waves in Solids, vols. I and II. Wiley, New York.

Banab, K.K., Motazedian, D., 2010. On the efficiency of the multi-channel analysis of surface wave method for shallow and semi-deep loose soil layers. Int. J. Geophys. 2010.

Baryeh, E.A., 2000. Strength properties of avocado pear. J. Agric. Eng. Res. 76 (4), 389.

Bechar, A., Mizrach, A., Barreiro, P., Landahl, S., 2005. Determination of mealiness in apples using ultrasonic measurements. Biosyst. Eng. 91, 329–334.

Bossy, E., Talmant, M., Laugier, P., 2004. Three-dimensional simulations of ultrasonic axial transmission velocity measurement on cortical bone models. J. Acoust. Soc. Am. 115, 2314.

Bunyaphlanan, N., 1973. Mechanical proprieties of carrots tissues, Ph.D. thesis.

Butz, P., Homann, C., Tauscher, C., 2005. Recent developments in noninvasive techniques for fresh fruit and vegetable internal quality analysis. J. Food Sci. 70 (9), 131–141.

Camarena, F., Martinez-Mora, J.A., 2006. Potential of ultrasound to evaluate turgidity and hydration of the orange peel. J. Food Eng. 75, 503–507.

Camarena, F., Martínez-Mora, J.A., Ardid, M., 2007. Ultrasonic study of the complete dehydration process of orange peel. Postharvest Biol. Technol. 43, 115–120.

Chen, Y., Chew, W.C., 1998. A three-dimensional finite difference code for the modeling of sonic logging tools. J. Acoust. Soc. Am. 103, 702.

Chew, W.C., Liu, Q., 1996. Perfectly matched layers for elastodynamics: a new absorbing boundary condition. J. Comput. Acoust. 4, 341–359.

De-Smedt, V., Barreiro, P., Verlinden, B.E., Veraverbeke, E.A., De Baerdemaeker, J., 2002. A mathematical model for the development of mealiness in apples. Postharvest Biol. Technol. 25, 273–291.

Flitsanov, F., Mizrach, A., Liberzon, A., Akerman, M., Zauberman, G., 2000. Measurement of avocado softening at various temperatures using ultrasound. Postharvest Biol. Technol. 20, 279–286.

Gaete-Garreton, L., Vargas-Hernandez, Y., Leon-Vidal, C., Pettorino-Besnier, A., 2005. J. Food. Sci. 70, 187–191.

Goss, S.A., Johnston, R.L., Shnol, S.E., 1978. Comprehensive compilation of empirical ultrasonic properties of mammalian tissues. J. Acoust. Soc. Am. 64, 423–457.

Grotte, M., Duprat, F., Piétri, E., Loonis, D., 2002. Young's modulus, Poisson's ratio, and Lame's coefficients of golden delicious apple. Int. J. Food Prop. 5 (2), 333–349.

Hosokawa, A., 2008. Development of a numerical cancellous bone model for finited-ifference time-domain simulations of ultrasound propagation. IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control 55, 1219–1221.

Jindal, V.K., Techasena, O., 1985. Compression tests for measuring the firmness of potatoes. Trans. ASAE (Am. Soc. Agric. Eng.) 85–1072.

Krautkramer, J., Krautkramer, H., 1990. Ultrasonic Testing of Materials. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany.

Malischewsky., P.G., 2005. Comparison of approximated solutions for the phase velocity of Rayleigh waves. Nanotechnology 16, 995–996.

Mizrach., C., 2000. Determination of avocado and mango fruit properties by ultrasonic technique. Ultrasonics 38, 717–733.

Mizrach, A., 2008. Ultrasonic technology for quality evaluation of fresh fruit and vegetables in pre-and postharvest processes. Postharvest Biol. Technol. 48, 315–330.

Mizrach, A., Galili, N., Rosenhouse, G., 2009. 3-D model of sound pressure field in a meridional section plane of fruit. Ultrasonics 49, 83–88.

Rayleigh, L., 1885. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. Proc. Lond. Math. Soc. 17, 4–11.

Schröder, C., Scott, W.R., 2002. On the stability of the FDTD algorithm for elastic media at a material interface. IEEE Trans. Geosci. Remote Sens. 40, 474–481.

Singh, K.K., Sreenivasula, B., 2006. Post-harvest physico-mechanical properties of orange peel and fruit. J. Food Eng. 73, 112–120.

Verlinden, J.A., De Smedt, V., Nicolaï, B.M., 2004. Evaluation of ultrasonic wave propagation to measure chilling injury in tomatoes. Postharvest Biol. Technol. 32, 109–113.

Referencias

Abbott, J. A. (1999). Quality measurement of fruits and vegetables. *Postharvest Biology and Technology*, 15(3):207–225.

Auld, B. A. (1973). *Acoustic fields and waves in solids*. New York. Wiley.

Baryeh, E. A. (2000). Strength properties of avocado pear. *Journal of agricultural engineering research*, 76(4):389–397.

Bastard, C., Remeniéras, J.-P., Callé, S., and Sandrin, L. (2009). Simulation of shear wave propagation in a soft medium using a pseudospectral time domain method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 126(4):2108–2116.

Bayliss, A. and Turkel, E. (1980). Radiation boundary conditions for wave-like equations. *Communications on Pure and applied Mathematics*, 33(6):707–725.

Bechar, A., Mizrach, A., Barreiro, P., and Landahl, S. (2005). Determination of mealiness in apples using ultrasonic measurements. *Biosystems engineering*, 91(3):329–334.

Bellon, V. (1993). Tools for fruit and vegetables quality control a review of current trends and perspectives. In *Fruit, Nut and Vegetable Production Engineering. Post-harvesting operations and quality sensing. Proc. IV Int. Symp. Fruit, nut and vegetable production engineering*, pages 22–26.

Berenger, J.-P. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of computational physics*, 114(2):185–200.

Biot, M. A. (1956). Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. i. low-frequency range. *the Journal of the Acoustical Society of America*, 28(2):168–178.

Botteldooren, D. (1995). Finite-difference time-domain simulation of low-frequency room acoustic problems. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 98(6):3302–3308.

Bunyaphlanan, N. (1973). *Mechanical propieties of carrots tissues.* PhD thesis.

Burlew, M. M., Madsen, E. L., Zagzebski, J. A., Banjavic, R. A., and Sum, S. W. (1980). A new ultrasound tissue-equivalent material. *Radiology*, 134(2):517–520.

Camarena, F. and Martinez-Mora, J. (2006). Potential of ultrasound to evaluate turgidity and hydration of the orange peel. *Journal of food engineering*, 75(4):503–507.

Camarena, F., Martínez-Mora, J., and Ardid, M. (2007). Ultrasonic study of the complete dehydration process of orange peel. *Postharvest biology and technology*, 43(1):115–120.

Cerjan, C., Kosloff, D., Kosloff, R., and Reshef, M. (1985). A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations. *Geophysics*, 50(4):705–708.

Chen, P., McCarthy, M., and Kauten, R. (1989). Nmr for internal quality evaluation of fruits and vegetables. *Transactions of the ASAE (USA)*, 32:1745–1753.

Cheng, Y. and Haugh, C. (1994). Detecting hollow heart in potatoes using ultrasound. *Transactions of the ASAE*, 37(1):217–222.

Chew, W. and Liu, Q. (1996). Perfectly matched layers for elastodynamics: a new absorbing boundary condition. *Journal of Computational Acoustics*, 4(04):341–359.

Chew, W. C. and Weedon, W. H. (1994). A 3d perfectly matched medium from modified maxwell's equations with stretched coordinates. *Microwave and optical technology letters*, 7(13):599–604.

Clayton, R. and Engquist, B. (1977). Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 67(6):1529–1540.

Cooke, J. and Rand, R. (1973). A mathematical study of resonance in intact fruits and vegetables using a 3-media elastic sphere model. *Journal of Agricultural Engineering Research*, 18(2):141–157.

Dewulf, W., Jancsok, P., Nicolaï, B., De Roeck, G., and Briassoulis, D. (1999). Determining the firmness of a pear using finite element modal analysis. *Journal of agricultural engineering research*, 74(3):217–224.

Engquist, B. and Majda, A. (1977). Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 74(5):1765–1766.

FAO/FAOSTAT (2009). The fao statistical database 08 de 10 de 2009. - http://faostat.fao.org/.

Fidelibus, M., Teixeira, A., and Davies, F. (2002). Mechanical properties of orange peel and fruit treated pre-harvest with gibberellic acid. *Transactions of the ASAE*, 45(4):1057–1062.

Forest, L., Gibiat, V., and Woignier, T. (1998). Biot's theory of acoustic propagation in porous media applied to aerogels and alcogels. *Journal of non-crystalline solids*, 225:287–292.

Foti, S. (2000). *Multistation methods for geotechnical characterization using surface waves*. PhD thesis, Politecnico di Torino.

Goss, S., Johnston, R., and Dunn, F. (1978). Comprehensive compilation of empirical ultrasonic properties of mammalian tissues. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 64(2):423–457.

Grotte, M., Duprat, F., Piétri, E., and Loonis, D. (2002). Young's modulus, poisson's ratio, and lame's coefficients of golden delicious apple. *International Journal of Food Properties*, 5(2):333–349.

Hastings, F. D., Schneider, J. B., and Broschat, S. L. (1996). Application of the perfectly matched layer (pml) absorbing boundary condition to elastic wave propagation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 100(5):3061–3069.

Higdon, R. (1991). Absorbing boundary conditions for elastic waves. *Geophysics*, 56(2):231–241.

Higdon, R. L. (1986). Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multidimensional wave equation. *Mathematics of computation*, 47(176):437–459.

Higdon, R. L. (1987). Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation. *Mathematics of computation*, 49(179):65–90.

Hosokawa, A. (2005). Simulation of ultrasound propagation through bovine cancellous bone using elastic and biot's finite-difference time-domain methods. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118(3):1782–1789.

Hosokawa, A. (2008). Development of a numerical cancellous bone model for finite-difference time-domain simulations of ultrasound propagation. *Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 55(6):1219–1233.

Hui, Y. H. (2006). *Handbook of fruits and fruit processing*. John Wiley & Sons.

IGP, C. R. (2009). Citricos valencianos - 10 de 10 de 2009. - http://www.citricosvalencianos.com/.

Jancsók, P. T., Clijmans, L., Nicolai, B. M., and De Baerdemaeker, J. (2001). Investigation of the effect of shape on the acoustic response of "conference" pears by finite element modelling. *Postharvest biology and technology*, 23(1):1–12.

Jiménez-Cuesta, M., Cuquerella, J., and Martínez-Jávaga, J. (1982). Determination of a color index for citrus fruit degreening. In *Proceedings of the International Society of Citriculture/[International Citrus Congress, November 9-12, 1981, Tokyo, Japan; K. Matsumoto, editor]*. Shimizu, Japan: International Society of Citriculture, 1982-1983.

Jin, F., Wang, Z., and Kishimoto, K. (2005). Basic properties of rayleigh surface wave propagation along curved surfaces. *International journal of engineering science*, 43(3):250–261.

Jindal, V. (1985). Compression tests for measuring the firmness of potatoes. *ASAE*, 85:1072.

Katina, L. (2007). Physiology of chilling-related postharvest rind breakdown of navel oranges (citrus sinensis [l] osbeck). *Ph. O. Latrobe University, Bundoora, Victoria*, 3086.

Katz, D. S., Thiele, E. T., and Taflove, A. (1994). Validation and extension to three dimensions of the berenger pml absorbing boundary condition for fd-td meshes. *Microwave and Guided Wave Letters, IEEE*, 4(8):268–270.

Kim, G.-W., Kim, M.-S., Sagara, Y., Bae, Y.-H., Lee, I.-B., Do, G.-S., Lee, S.-H., and Kang, S.-W. (2008). Determination of the viscoelastic properties of apple flesh under quasi-static compression based on finite element method optimization. *Food science and technology research*, 14(3):221–231.

Kim, K.-B., Kim, M.-S., Park, J.-G., Lee, S., Kim, G.-S., and Jung, H.-M. (2006). Determination of apple firmness by ultrasonic measurement. In *XVIII Imeko World Congress, Metrology for a Sustainable Development. Rio de Janeiro, Brazil*.

Ladanyia, M. and Ladaniya, M. (2010). *Citrus fruit: biology, technology and evaluation*. Academic press.

Levander, A. R. (1985). Use of the telegraphy equation to improve absorbing boundary efficiency for fourth-order acoustic wave finite difference schemes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 75(6):1847–1852.

Liao, Z.-P., Wong, H. L., Yang, B.-P., and Yuan, Y. (1984). A transmitting boundary for transient wave analysis. *Scientia Sinica*, 27(10):1063–1076.

Lindman, E. (1975). "free-space" boundary conditions for the time dependent wave equation. *Journal of computational physics*, 18(1):66–78.

Liu, Q.-H. (1999). Perfectly matched layers for elastic waves in cylindrical and spherical coordinates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 105(4):2075–2084.

Loodts, J., Tijskens, E., Wei, C., Vanstreels, E., Nicolaï, B., and Ramon, H. (2006). Micromechanics: simulating the elastic behavior of onion epidermis tissue. *Journal of texture studies*, 37(1):16–34.

LoVetri, J., Mardare, D., and Soulodre, G. (1996). Modeling of the seat dip effect using the finite-difference time-domain method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 100(4):2204–2212.

Malischewsky, P. G. (2005). Comparison of approximated solutions for the phase velocity of rayleigh waves (comment on ccharacterization of surface damage via surface acoustic waves'). *Nanotechnology*, 16(6):995–996.

Manduca, A., Oliphant, T. E., Dresner, M., Mahowald, J., Kruse, S., Amromin, E., Felmlee, J. P., Greenleaf, J. F., and Ehman, R. L. (2001). Magnetic resonance elastography: non-invasive mapping of tissue elasticity. *Medical image analysis*, 5(4):237–254.

Mebatsion, H. K., Verboven, P., Ho, Q. T., Verlinden, B., and Nicolaï, B. (2008). Modelling fruit (micro) structures, why and how? *Trends in food science & technology*, 19(2):59–66.

Mizrach, A. (2000). Determination of avocado and mango fruit properties by ultrasonic technique. *Ultrasonics*, 38(1):717–722.

Mizrach, A. (2008). Ultrasonic technology for quality evaluation of fresh fruit and vegetables in pre-and postharvest processes. *Postharvest biology and technology*, 48(3):315–330.

Mur, G. (1981). Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations. *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, (4):377–382.

Nielsen, M. and Martens, H. J. (1997). Low frequency ultrasonics for texture measurements in cooked carrots (daucus carota l.). *Journal of food science*, 62(6):1167–1175.

Nourain, J., Ying, Y.-b., Wang, J.-p., Rao, X.-q., and Yu, C.-g. (2005). Firmness evaluation of melon using its vibration characteristic and finite element analysis. *Journal of Zhejiang University. Science. B*, 6(6):483.

Olmo, M., Nadas, A., and García, J. (2000). Nondestructive methods to evaluate maturity level of oranges. *Journal of Food Science*, 65(2):365–369.

Peng, C. and Toksöz, M. N. (1994). An optimal absorbing boundary condition for finite difference modeling of acoustic and elastic wave propagation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 95(2):733–745.

Randall, C. (1989). Absorbing boundary condition for the elastic wave equation: Velocity-stress formulation. *Geophysics*, 54(9):1141–1152.

Rayleigh, L. (1885). On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 17(1):4–11.

Schneider, J. B., Wagner, C. L., and Broschat, S. L. (1998). Implementation of transparent sources embedded in acoustic finite-difference time-domain grids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 103(1):136–142.

Schröder, C. T. and Scott Jr, W. R. (2002). On the stability of the fdtd algorithm for elastic media at a material interface. *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, 40(2):474–481.

Singh, K. and Reddy, B. (2006a). Measurement of mechanical properties of sweet orange. *J. Fd. J. Fd. Sci. Technol.*, 43(4):442–445.

Singh, K. K. and Reddy, B. S. (2006b). Post-harvest physico-mechanical properties of orange peel and fruit. *Journal of food engineering*, 73(2):112–120.

Solos, J. (1998). *Nondestructive detection of hollow heart in potatoes using ultrasonics*. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University.

Standard, A. et al. (1998). Compression test of food materials of convex shape. *ASAE S368*, 3:554–556.

Stein, S. and Wysession, M. (2009). *An introduction to seismology, earthquakes, and earth structure*. John Wiley & Sons.

Taflove, A. and Brodwin, M. E. (1975). Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent maxwell's equations. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 23(8):623–630.

Taflove, A., Hagness, S. C., et al. (1995). Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method. *Norwood, 2nd Edition, MA: Artech House, l995*.

Taylor, C. D., Lam, D.-H., and Shumpert, T. H. (1969). Electromagnetic pulse scattering in time-varying inhomogeneous media. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 17(5):585–589.

Virieux, J. (1986). P-sv wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, 51(4):889–901.

Wang, S. (1996). Finite-difference time-domain approach to underwater acoustic scattering problems. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 99(4):1924–1931.

Wilson, D. K., Ostashev, V. E., and Collier, S. L. (2004). Time-domain equations for sound propagation in rigid-frame porous media (l). *The Journal of the Acoustical Society of America*, 116(4):1889–1892.

Wu, N. and Pitts, M. J. (1999). Development and validation of a finite element model of an apple fruit cell. *Postharvest Biology and Technology*, 16(1):1–8.

Yee, K. S. et al. (1966). Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas Propag*, 14(3):302–307.

Yuan, X., Borup, D., Wiskin, J. W., Berggren, M., Eidens, R., Johnson, S., et al. (1997). Formulation and validation of berenger's pml absorbing boundary for the fdtd simulation of acoustic scattering. *Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 44(4):816–822.

Zwikker, C. (1949). *Sound absorbing materials*. Elsevier Publishing Company Inc.